Ejemplo 1.5 (Página 138).

THE FINITE ELEMENT METHOD IN ENGINEERING
FOURTH EDITION
Elsevier Science & Technology Books
December 2004.

La viga dispone de una sección rectangular con 1cm de ancho y 2cm de altura y la longitud es 60cm, sujeto a una carga vertical concentrado de 1000N como se muestra en la figura 1.12(a) (actuando e 20cm del nudo inicial). La viga está empotrada en ambos extremos. Obtener la tensión en la viga modelando mediante dos elementos. El módulo de elasticidad del material es E=10^7 N/cm2.

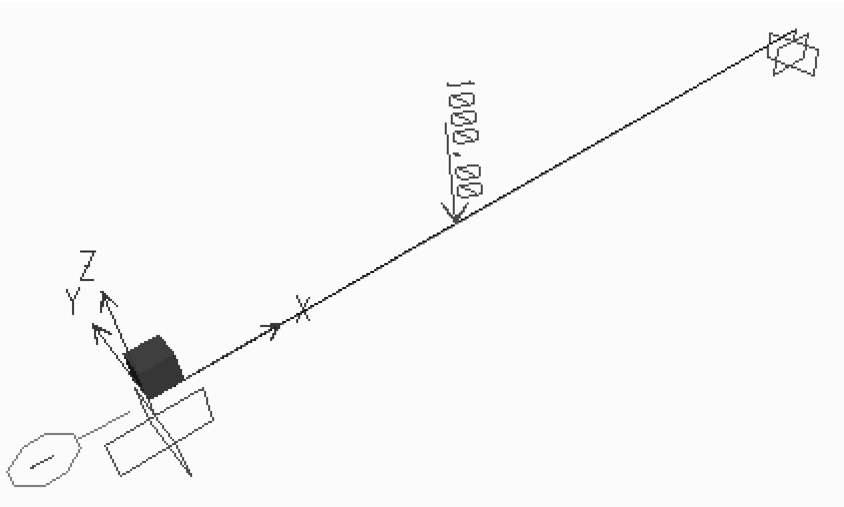


Figura 1.12(a)

Solución.

El fin principal del ejemplo, es mostrar una comparación de los resultados que se obtiene de analizar la viga con sap2000 y los resultados de un proceso detallado mediante el *método de los elementos finitos*, que para este caso está programado en matCAD. No se consideran los efectos por cortante en los elementos.

1. Para modelar la viga mediante elementos finitos se toma un sistema de de orientación global, la misma que viene por defecto en Sap2000, para este caso se analizará en el plano X-Z como muestra la figura 1.12.1, que muestra la numeración de los nudos y de los elementos, la conectividad entre elementos o la orientación local para cada elemento.

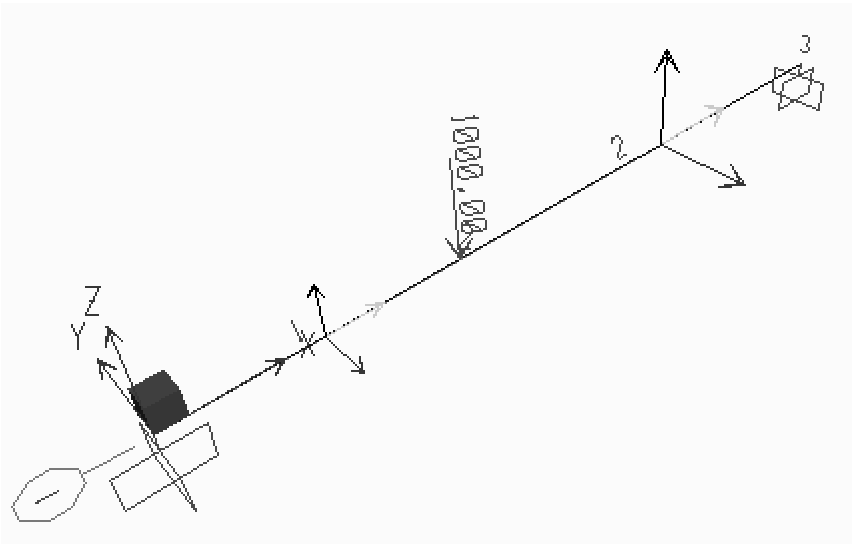


Figura: 1.12.1: conectividad

Seguidamente, se ordena los argumentos

2. ARGUMENTOS

Para realizar el análisis por el Método de Elementos Finitos es necesario ordenar los argumentos de la siguiente manera

2.1 Nudos

Las coordenadas de los nudos considerados en la estructura
columna 1: coordenada "x" del nudo en el sistema global
columna 2: coordenada "y" del nudo en el sistema global

NODE :=

	1	2
1	0	0
2	20	0
3	60	0

2.2 Propiedades de los elementos

Las propiedades de la sección trasversal de los elementos y del material que está compuesto, cada fila representa una propiedad distinta y las columnas son:
columna 1: momento de inercia
columna 2: módulo de elasticidad del material

PROP :=

	1	2
1	0.667	$1 \cdot 10^7$

2.3 Elementos

Cada fila representa una barra, contiene la información de la conectividad del elemento en el sistema, cada columna representa:
columna 1: nudo inicial del elemento
columna 2: nudo final del elemento
columna 3: número de propiedad del elemento

MEMB :=

	1	2	3
1	1	2	1
2	2	3	1

2.4 Restricciones - Apoyos

Cada fila representa un apoyo de la estructura, las columnas informan el comportamiento para cada grado de libertad, la convención es:

- "1" para los grados de libertad de desplazamiento restringido
- "0" para los grados de libertad donde existe desplazamiento libre.

Cada columna representa:
columna 1: número del nudo donde existe el apoyo
columna 2: "uy?" información del desplazamiento en la dirección "y" global
columna 3: "Rz?" iinformación de la rotación en el eje "z" global

SUPP :=

	1	2	3
1	1	1	1
2	3	1	1

2.5 Cargas

2.5.1 cargas en nudos(NLF)

Se requiere las cargas en los nudos, si los hubiera, cada columna representa.
Columna 1: Número del nudo
Columna 2: carga puntual en la dirección global Y.
Columna 3: momento concentrado en la dirección global z.

NLF :=

	1	2	3
1	2	$-1\cdot10^{3}$	0

3. MATRIZ DE RIGIDEZ RESPECTO AL SISTEMA GLOBAL DE LOS ELEMENTOS

Reference:D:\FEM\Vigas2D\0 VIGA2D_FUNCIONES.xmcd

Obteniendo la matriz de rigidez respecto al sistema global para el elemento: $m := 1$

3.1 Matriz de rigidez respecto al sistema local

- Momento de inercia respecto al eje z

$I(m) = 0.667$

- Módulo de elasticidad del material

$E(m) = 1 \times 10^{7}$

- Longitud del elemento

$$\sqrt{\left(x_f(m) - x_i(m)\right)^2 + \left(y_f(m) - y_i(m)\right)^2} = \sqrt{(20-0)^2 + (0-0)^2} = 20$$

$l(m) = 20$

reemplazando estos valores, resuta:

$$gdl(m)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$k_e(m) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 & 10 \\ 10 & 133.333 & -10 & 66.667 \\ -1 & -10 & 1 & -10 \\ 10 & 66.667 & -10 & 133.333 \end{pmatrix} \cdot 10^4 \qquad gdl(m) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

..... se procede de igual manera para cada elemento

3.2 Matriz de rigidez total ensamblado

Seguidamente se ensambla en una sola matriz según los grados de libertad, lo que resulta.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -1 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 133.333 & -10 & 66.667 & 0 & 0 \\ -1 & -10 & 1.125 & -7.5 & -0.125 & 2.5 \\ 10 & 66.667 & -7.5 & 200 & -2.5 & 33.333 \\ 0 & 0 & -0.125 & -2.5 & 0.125 & -2.5 \\ 0 & 0 & 2.5 & 33.333 & -2.5 & 66.667 \end{pmatrix} \cdot 10^4$$

4. VECTOR DE FUERZAS NODALES EQUIVALENTES

Reference:D:\FEM\Vigas2D\0 VIGA2D_FUNCIONES.xmcd

4.2 Vector de cargas puntuales en nudos

Existe carga puntual en el nudo 2, en el grado de libertad 3, las cargas en los nudos se ensamblan directamente en el vector de fuerzas expresados en coordenadas globales(para vigas el sistema de corrdenada global y el sistema de coordenadas locales coinciden)

$$F_{NLF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Finalmente, el vector de carga nodal equivalente resulta

F=F.nld + CARGAS NODALES EQUIVALENTES

$$F_{NLF} + 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5 DESPLAZAMIENTOS EN NUDOS

Reference:D:\FEM\Vigas2D\0 VIGA2D_FUNCIONES.xmcd

5.1 Imponiendo las condiciones de contorno

La matriz de rigidez total(K) de la estructura obtenido anteriormente está libre en todos sus grados de libertad(desplazamiento libre), pero como la estructura cuenta con apoyos en las cuales los desplazameintos son nulos, se modifica "K" para tal efecto.

$$Km = \begin{pmatrix} 1\times10^{307} & 1\times10^{5} & -1\times10^{4} & 1\times10^{5} & 0 & 0 \\ 1\times10^{5} & 1\times10^{307} & -1\times10^{5} & 6.667\times10^{5} & 0 & 0 \\ -1\times10^{4} & -1\times10^{5} & 1.125\times10^{4} & -7.5\times10^{4} & -1.25\times10^{3} & 2.5\times10^{4} \\ 1\times10^{5} & 6.667\times10^{5} & -7.5\times10^{4} & 2\times10^{6} & -2.5\times10^{4} & 3.333\times10^{5} \\ 0 & 0 & -1.25\times10^{3} & -2.5\times10^{4} & 1\times10^{307} & -2.5\times10^{4} \\ 0 & 0 & 2.5\times10^{4} & 3.333\times10^{5} & -2.5\times10^{4} & 1\times10^{307} \end{pmatrix}$$

5.2 Matriz aumentada

Teniendo los coeficientes de las incógnitas(Km) y los términos independientes(F) de las ecuaciones simultáneas que se forman para cada grado de libertad en los nudos, existe muchas maneras para resolver la ecuación. Formando la matriz aumentada

$$\mathrm{augment}(Km, F) = \begin{pmatrix} 1\times10^{307} & 1\times10^{5} & -1\times10^{4} & 1\times10^{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1\times10^{5} & 1\times10^{307} & -1\times10^{5} & 6.667\times10^{5} & 0 & 0 & 0 \\ -1\times10^{4} & -1\times10^{5} & 1.125\times10^{4} & -7.5\times10^{4} & -1.25\times10^{3} & 2.5\times10^{4} & -1\times10^{3} \\ 1\times10^{5} & 6.667\times10^{5} & -7.5\times10^{4} & 2\times10^{6} & -2.5\times10^{4} & 3.333\times10^{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1.25\times10^{3} & -2.5\times10^{4} & 1\times10^{307} & -2.5\times10^{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2.5\times10^{4} & 3.333\times10^{5} & -2.5\times10^{4} & 1\times10^{307} & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 Resolviendo la ecuacicón

la ecuación anterior en su forma escalonada reducida

$$\text{rref}(\text{augment}(Km,F)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.119 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4.444 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4 Los desplazamientos

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.119 & -4.444 \times 10^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordenando

$$NDIS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0.118519 & -0.004444 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:
Columna 1: Número del nudo
Columna 2: Reacción e Y(Sistema Global)
Columna 3: Giro en

Para comparar, se muestra en el siguiente cuadro los desplazamientos obtenidos con un análisis realizado en sap2000 12.0.0 Educacional.

TABLE: Joint Displacements								
Joint	**OutputCase**	**CaseType**	**U1**	**U2**	**U3**	**R1**	**R2**	**R3**
Text	Text	Text	cm	cm	cm	Radians	Radians	Radians
1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
2	DEAD	LinStatic	0	0	-0.118519	0	0.004444	0
3	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

se obserava que coinciden ambos resultados, entonces puede ser que sap2000 12.0.0 utilice estas mismas formas de analizar la estructura.

6 REACCIONES EN LOS APOYOS

La matriz de rigidez total de la estructura es.

$$K = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{4} & 1 \times 10^{5} & -1 \times 10^{4} & 1 \times 10^{5} & 0 & 0 \\ 1 \times 10^{5} & 1.333 \times 10^{6} & -1 \times 10^{5} & 6.667 \times 10^{5} & 0 & 0 \\ -1 \times 10^{4} & -1 \times 10^{5} & 1.125 \times 10^{4} & -7.5 \times 10^{4} & -1.25 \times 10^{3} & 2.5 \times 10^{4} \\ 1 \times 10^{5} & 6.667 \times 10^{5} & -7.5 \times 10^{4} & 2 \times 10^{6} & -2.5 \times 10^{4} & 3.333 \times 10^{5} \\ 0 & 0 & -1.25 \times 10^{3} & -2.5 \times 10^{4} & 1.25 \times 10^{3} & -2.5 \times 10^{4} \\ 0 & 0 & 2.5 \times 10^{4} & 3.333 \times 10^{5} & -2.5 \times 10^{4} & 6.667 \times 10^{5} \end{pmatrix}$$

el vector de desplazamientos:

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.119 & -4.444 \times 10^{-3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K \cdot D - F = \begin{pmatrix} 740.741 \\ 8.889 \times 10^{3} \\ 1.137 \times 10^{-13} \\ 0 \\ 259.259 \\ -4.444 \times 10^{3} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 740.741 \\ 8.889 \times 10^{3} \\ 1.137 \times 10^{-13} \\ 0 \\ 259.259 \\ -4.444 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Ordenado :

$$\begin{array}{cccc} & \text{nudo} & Ry & Mz \\ REAC = & \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right. & \begin{array}{c} 740.740741 \\ 259.259259 \end{array} & \left. \begin{array}{c} 8888.888889 \\ -4444.444444 \end{array} \right) \end{array}$$

Con la finalidad de comparar, el siguiente cuadro mustra los resultados de analizar con sap2000 12.0.0.

TABLE: Joint Reactions							
Joint	**OutputCase**	**F1**	**F2**	**F3**	**M1**	**M2**	**M3**
Text	Text	N	N	N	N-cm	N-cm	N-cm
1	DEAD	0	0	740.740741	0	-8888.8889	0
3	DEAD	0	0	259.259259	0	4444.444444	0

Se observa que los resultados son los mismos.

7 ESFUERZOS EN LOS EXTREMOS DE LOS ELEMENTOS

Reference:D:\FEM\Vigas2D\0 VIGA2D_FUNCIONES.xmcd

Obteniendo los resultados para el elemento $m := 2$

7.1 Matriz de rigidez respecto al sistema local

$$k_e(m) = \begin{pmatrix} 1.25\times10^{3} & 2.5\times10^{4} & -1.25\times10^{3} & 2.5\times10^{4} \\ 2.5\times10^{4} & 6.667\times10^{5} & -2.5\times10^{4} & 3.333\times10^{5} \\ -1.25\times10^{3} & -2.5\times10^{4} & 1.25\times10^{3} & -2.5\times10^{4} \\ 2.5\times10^{4} & 3.333\times10^{5} & -2.5\times10^{4} & 6.667\times10^{5} \end{pmatrix}$$

7.2 Desplazamientos en los nudos del elemento en el sistema local

Grados de libertad de los nudos

$$De(m) = \begin{pmatrix} -0.119 \\ -4.444\times10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad gdl(m) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

7.3 Esfuerzos en los extremos del elemento

$$k_e(m)\cdot De(m) = \begin{pmatrix} -259.259 \\ -5.926\times10^{3} \\ 259.259 \\ -4.444\times10^{3} \end{pmatrix} \qquad gdl(m) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

.... de igual manera para cada elemento

Resumiendo para todos los elementos, se tiene:

MFOR =

	1	2	3	4
1	1	1	740.740741	8888.888889
2	1	2	-740.740741	5925.925926
3	2	2	-259.259259	-5925.925926
4	2	3	259.259259	-4444.444444

Donde:
columna 1: número de elemento
columna 2: número de nudo
columna 3: exfeurzo axial
columna 4: esfuerzo cortante
columna 5: momento flector

Los resultados Obtenidos con sap20000 12.0.0 se muestra en el cuadro.

TABLE: Element Joint Forces - Frames							
Frame	**Joint**	**F1**	**F2**	**F3**	**M1**	**M2**	**M3**
Text	Text	N	N	N	N-cm	N-cm	N-cm
1	1	0	0	740.740741	0	-8888.8889	0
1	2	0	0	-740.740741	0	-5925.9259	0
2	2	0	0	-259.259259	0	5925.925926	0
2	3	0	0	259.259259	0	4444.444444	0

los resultados son los mismos

8. LEYES DE DESPLAZAMIENTOS

Reference:D:\FEM\Vigas2D\0 VIGA2D_FUNCIONES.xmcd

Se obtendrán las ecuaciones que gobiernan los desplazamientos en todo el elemento, por esta razón todo está referido de acuerdo su sistema de orientación local. Con la finalidad de obtener el gráfico desde pares de puntos, se evaluará las ecuaciones para 11 puntos sobre el elemento.

Analizando para el elemento: $m := 2$

8.1 Gráfico del desplazamiento lineal - en el eje "y" local

Desplazamientos en los extremos de los elementos

los desplazamientos en los extremos del elemento, para los grados de libertad asociados a los nudos del elemento son

Desplazamiento del nudo inicial

$u_1 := De(m)_1 \qquad \theta_1 := De(m)_2$

$$De(m) = \begin{pmatrix} -0.119 \\ -4.444 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desplazamiento del nudo final

$u_2 := De(m)_3 \qquad \theta_2 := De(m)_4$

$$gdl(m) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Longitud del elemento

$L := l(m)$ *

Ecuación del desplazamiento lineal.

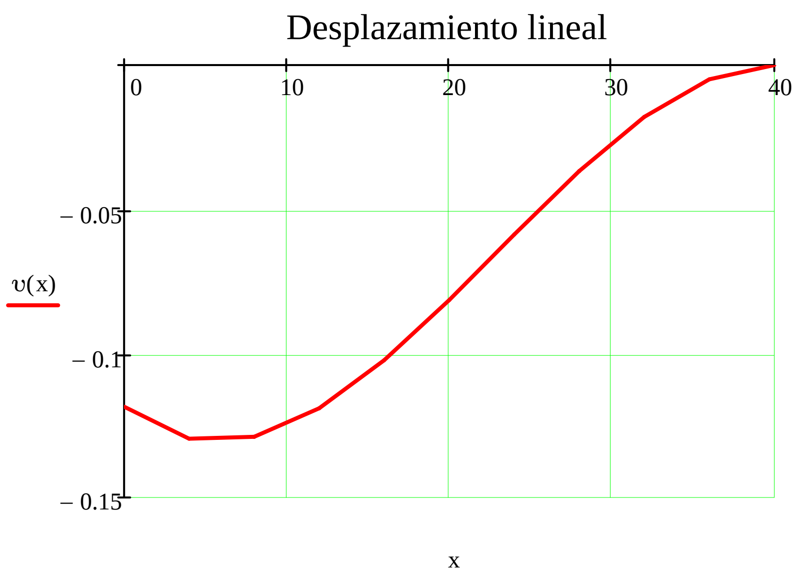
En Sap2000 12.0.0, para una distancia de 20cm desde el nudo inicial, el desplazamiento, resulta.

$$\upsilon(x) := \left(\frac{2\cdot x^3}{L^3} - \frac{3\cdot x^2}{L^2} + 1\right)\cdot u_1 + \left(x - \frac{2\cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot \theta_1 + \left(\frac{3\cdot x^2}{L^2} - \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot u_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\cdot \theta_2$$

Evaluando en 11 puntos.

$$x := 0, \frac{l(m)}{10} .. l(m)$$

$x =$	$\upsilon(x) =$
0	-0.118519
4	-0.1296
8	-0.128948
12	-0.119052
16	-0.1024
20	-0.081481
24	-0.058785
28	-0.0368
32	-0.018015
36	-0.004919
40	0



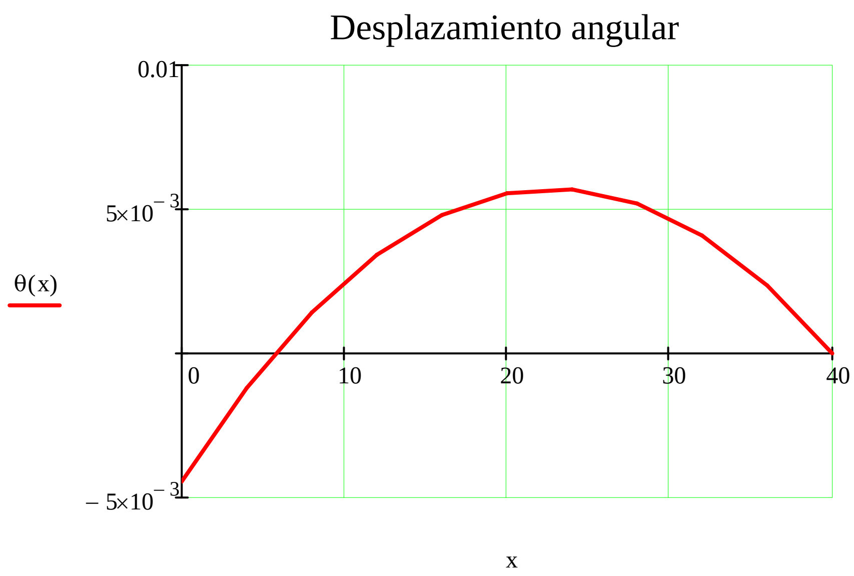
8.2 Desplazamiento angular.

Conocido la ecuación del desplazamiento lineal, el desplazamiento angular está dado por

$$\theta(x) := \frac{d}{dx}\upsilon(x)$$

Evaluando para 11 puntos.

$x =$	$\theta(x) =$
0	-0.004444
4	-0.0012
8	0.001422
12	0.003422
16	0.0048
20	0.005556
24	0.005689
28	0.0052
32	0.004089
36	0.002356
40	0



9. LEYES DE TENSIONES Y ESFUERZOS

Reference:D:\FEM\Vigas2D\0 VIGA2D_FUNCIONES.xmcd

Se obtendrán las ecuaciones que gobiernan los tensiones y esfuerzos en todo el elemento, por esta razón todo está referido de acuerdo su sistema de orientación local. Con la finalidad de obtener el gráfico desde pares de puntos, se evaluará las ecuaciones para 11 puntos sobre el elemento.

Analizando para el elemento: $m := 2$

Resumiendo, el desplazamiento está dado por:

$$De(m) = \begin{pmatrix} -0.118519 \\ -0.004444 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_1 := De(m)_1 \qquad \theta_1 := De(m)_2$$

$$u_2 := De(m)_3 \qquad \theta_2 := De(m)_4$$

$$L := l(m) \;*$$

$$\upsilon(x) := \left(\frac{2\cdot x^3}{L^3} - \frac{3\cdot x^2}{L^2} + 1\right)\cdot u_1 + \left(x - \frac{2\cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\cdot\theta_1 + \left(\frac{3\cdot x^2}{L^2} - \frac{2\cdot x^3}{L^3}\right)\cdot u_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)\cdot\theta_2$$

9.1 Tensión en la dirección local x' (Dirección local "1" en Sap2000 12.0.0)

La tensión para elementos viga(frame en Sap2000 12.0.0) está dado por.

$$\sigma_{xx}(x,y) := -y\cdot E(m)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x)$$

la tensión será evauada en la fibra superior del elemento $m = 2$, para lo cual y=1. Evaluando la función para obtener las tensiones máximas, que en este caso suceden cuando x=0(Nudo unicial) y cuando x=40(nudo final). .

$\sigma_{xx}(0,1) = -8888.888894$ N/cm2

$\sigma_{xx}(40,1) = 6666.666667$ N/cm2

9.2 El momento flector(M33 en Sap2000 12.0.0)

El momento flector está establecido mediante.

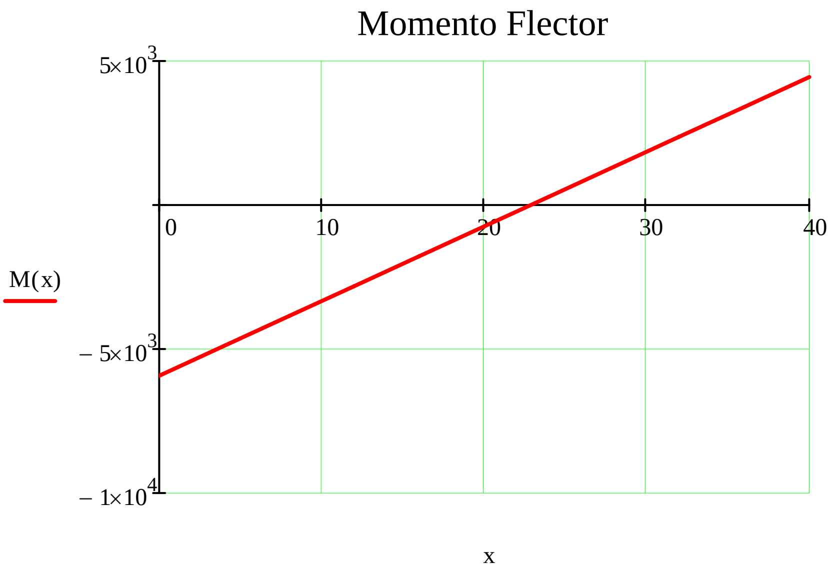
$$M(x) := -E(m)\cdot I(m)\cdot\frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x)$$

Evaluando en 11 puntos.

$$x := 0, \frac{l(m)}{10} .. l(m)$$

x =
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40

M(x) =
-5925.925929
-4888.888889
-3851.851852
-2814.814815
-1777.777778
-740.740741
296.296296
1333.333333
2370.37037
3407.407407
4444.444444



Los resultados del Sap2000 12.0.0 se muestra en la siguiente cuadro..

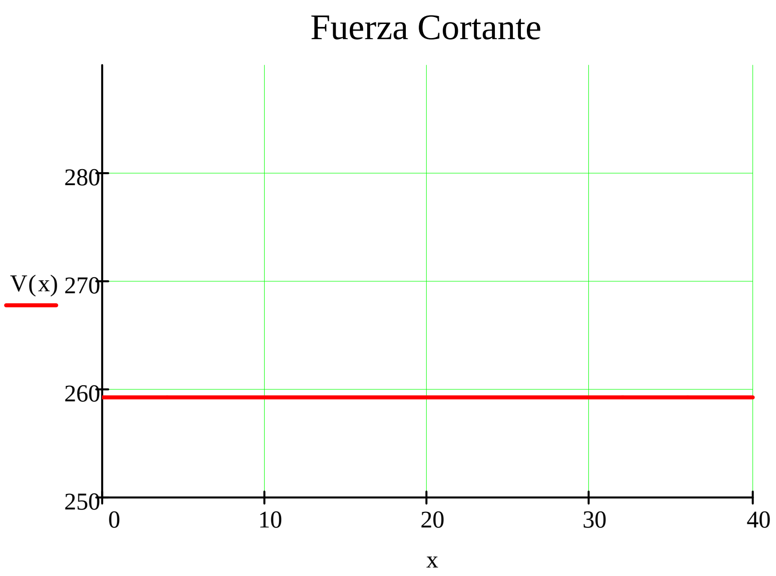
TABLE: Element Forces - Frames					
Frame	Station	V2	M3	FrameElem	ElemStation
Text	cm	N	N-cm	Text	cm
2	0	259.259259	5925.925926	2-1	0
2	4	259.259259	4888.888889	2-1	4
2	8	259.259259	3851.851852	2-1	8
2	12	259.259259	2814.814815	2-1	12
2	16	259.259259	1777.777778	2-1	16
2	20	259.259259	740.740741	2-1	20
2	24	259.259259	-296.296296	2-1	24
2	28	259.259259	-1333.33333	2-1	28
2	32	259.259259	-2370.37037	2-1	32
2	36	259.259259	-3407.4074	2-1	36
2	40	259.259259	-4444.4444	2-1	40

9.3 Fuerza cortante(V22 en Sap2000 12.0.0)

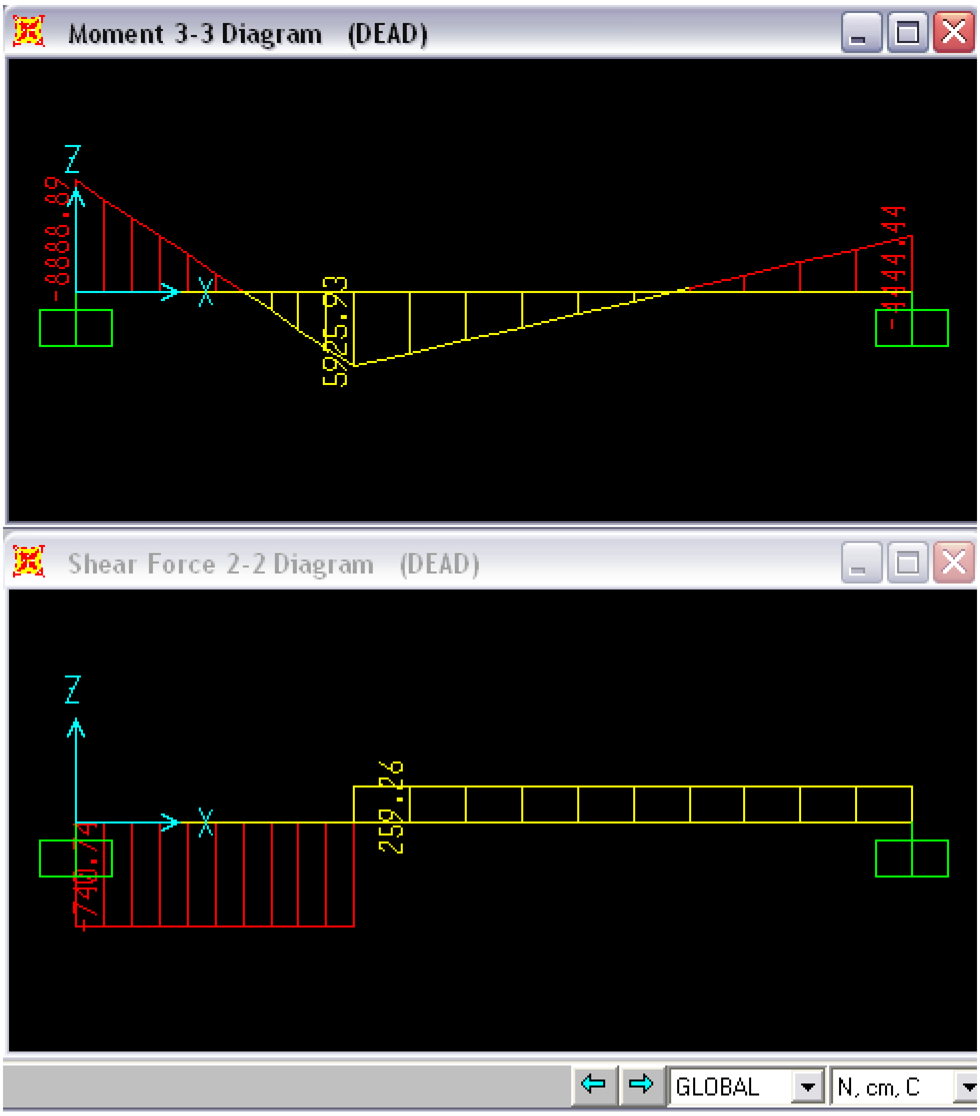
$$V(x) := \frac{d}{dx}M(x)$$

Evaluando para 11 puntos.

x =	V(x) =
0	259.259259
4	259.259259
8	259.259259
12	259.259259
16	259.259259
20	259.259259
24	259.259259
28	259.259259
32	259.259259
36	259.259259
40	259.259259



Finalmente, el gráfico generado por sap2000 de los esfuerzos para la viga modelada.



Conclusión.

Sap2000 v12.0.0 Educacional utiliza para el análisis de objetos "Frame"(vigas - columnas) elementos con nudos en sus extremos, en este caso utiliza las mismas teorías que se encuentra en muchos libros que trata sobre FEM para elementos viga.

Comentarios Sugerencias