U.N.S.C.H
Escuela Profesional de Ingeniería Civil

“Análisis de Armadura por el Método de Rigidez”

Curso : Análisis Estructural II / IC-422
Profesor :
Estudiante : CANCHARI GUTIÉRREZ, Edmundo.
Cod. Est. : 16005011

8.21.1 Calcular los esfuerzos en la estructura de la figura 8.33 Todas las barras son del mismo material, con módulo de elasticidad E=200000 MPa y tienen igual área trasversal A=10 cm^2

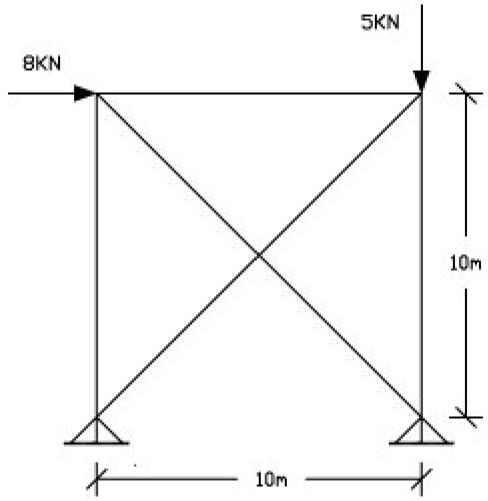

FIG 8.33: Armadura

Solución

1. Estableciendo convenciones:

1.1 Inicialmente se opta por una orientación global, horizontalmente el eje "X" positivo y el eje "Y" en la vertical, como en los libros clásicos.

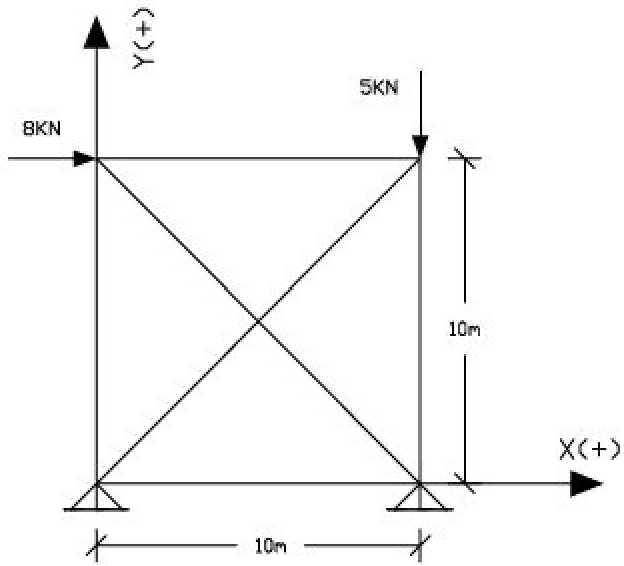

FIG 8.33-1: Sistema Global

1.2 Dividir la estructura en una serie de elementos finitos e identificar sus puntos extremos como nodos, enumerar nudos y barras, elegir su orientación local para cada elemento, esto es, estableciendo el nudo inicial y final para cada elemento, como se muestra en la siguiente figura.

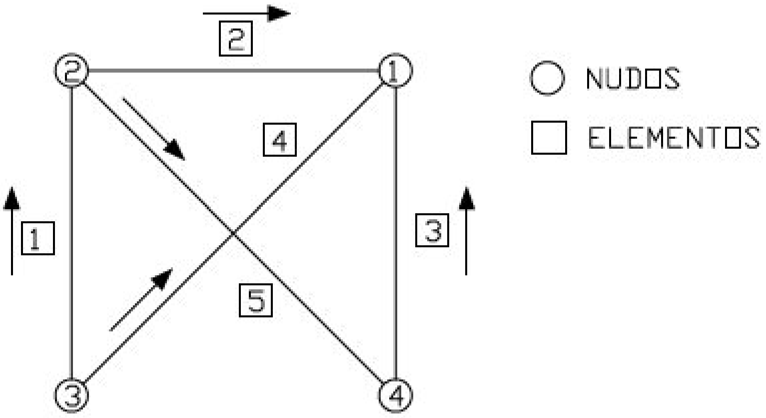

FIG 8.33-2: Nudos y barras

1.3 dependiendo de la enumeración de los nudos, los grados de libertad para el sistema es.

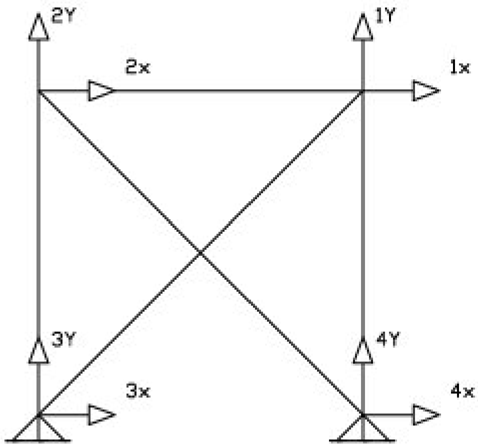

FIG 8.33-3: Grados de libertad

2. Ordenando argumentos.

2.1 de la estructura

2.1.1 Nudos.

Coordenada para cada nudo considerado en el sistema global

NODE :=

	1	2
1	10	10
2	0	10
3	0	0
4	10	0

Cada fila representa un nudo.

Col_1: abscisa X
Col_2: ordenada Y

2.1.2 Propiedades.

propiedad de la sección trasversal de los elementos

PROP :=

	1	2
1	$1\cdot10^{-3}$	$2\cdot10^{11}$

Cada fila representa una propiedad.

Col_1: área de la sección trasversal (m2)
Col_2: Módulo de elasticidad

2.1.3 Elementos.

MEMB :=

	1	2	3
1	3	2	1
2	2	1	1
3	4	1	1
4	3	1	1
5	2	4	1

Cada fila representa un elemento.

Col_1: nudo inicial
Col_2: nudo final
Col_3: propiedad

2.1.4 Apoyos.

las convenciones para cada grado de libertad son: "0" desplazamiento libre. "1" desplazamiento restringido.

Cada fila representa un soporte.

Col_1: número de nudo donde existe el soporte
Col_2: Desplazamiento en x "ux?"
Col_2: Desplazamiento en y "uy?"

SUPP :=

	1	2	3
1	3	1	1
2	4	1	1

2.2 Cargas

2.2.1 Carga puntual en nudos.

Tomando en cuenta la orientación para el sistema global, se tiene:

NLF :=

	1	2	3
1	1	0	$-5\cdot10^{3}$
2	2	$8\cdot10^{3}$	0

La columna #1 indica el número de nudo, la columna #2 fuerza en la dirección "X" global y la columna #3 la fuerza en la dirección "Y"

3. Proceso de cálculo

3.1 El vector de fuerzas equivalente en los nudos

Dado que para la armadura las fuerzas actuantes se encuentran en los nudos, ensamblando convenientemente según a los grados de libertad se tiene:

$$F_e := \begin{pmatrix} 0 \\ -5000 \\ 8000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1x \\ 1y \\ 2x \\ 2y \\ 3x \\ 3y \\ 4x \\ 4y \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz de rigidez global de cada miembro

3.2.1 matriz de rigidez global del miembro 1

$Elem := 1$

- Longitud del elemento

$$L_e := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_e \leftarrow \sqrt{(xi-xf)^2 + (yi-yf)^2} \end{array} \right.$$

$L_e = 10$

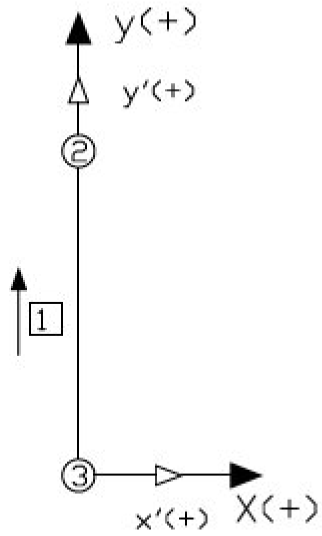

FIG 8.33-4: Elemento 1

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje X global.

$$\lambda_x := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf-xi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_x = 0$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje Y global.

$$\lambda_y := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf-yi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_y = 1$

- Matriz de rigidez de un miembro de armadura en sistema local

área de la sección transversal del elemento

$$A_t := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ A_t \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

Módulo de elasticidad del elemento

$$E := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$$A_t = 1 \times 10^{-3} \qquad\qquad E = 2 \times 10^{11}$$

y la matriz de rigidez local del elemento es:

$$k := \frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 10^7$$

- matriz de trasformación de desplazamientos.

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \qquad T_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad T_e^{\,T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- finalmente, la matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es $K_e := T_e^{\,T} \cdot k \cdot T_e$

$$K_e = \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{0.001 \cdot 200000000000}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0e7 & 0 & -2.0e7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.0e7 & 0 & 2.0e7 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{A_t \cdot E}{L_e}$$

3.2.2 matriz de rigidez global del miembro 2

$Elem := 2$

- Longitud del elemento

$$L_e := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_e \leftarrow \sqrt{(xi-xf)^2 + (yi-yf)^2} \end{array} \right.$$

$L_e = 10$

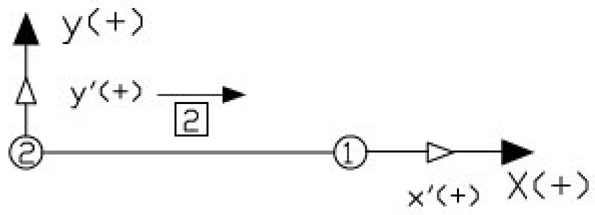

FIG 8.33-5: Elemento 2

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje X global.

$$\lambda_x := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_x = 1$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje Y global.

$$\lambda_y := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_y = 0$

- Matriz de rigidez de un miembro de armadura en sistema local

área de la sección transversal del elemento

$$A_t := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ A_t \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

Módulo de elasticidad del elemento

$$E := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$$A_t = 1 \times 10^{-3} \qquad\qquad E = 2 \times 10^{11}$$

y la matriz de rigidez local del elemento es:

$$k := \frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 10^7$$

- matriz de trasformación de desplazamientos.

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \quad T_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad T_e^{\,T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- finalmente, la matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es $K_e := T_e^{\,T} \cdot k \cdot T_e$

$$K_e = \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{0.001 \cdot 200000000000}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 2.0e7 & 0 & -2.0e7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.0e7 & 0 & 2.0e7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{A_t \cdot E}{L_e}$$

3.2.3 matriz de rigidez global del miembro 3

$$\text{Elem} := 3$$

- Longitud del elemento

$$L_e := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_e \leftarrow \sqrt{(xi - xf)^2 + (yi - yf)^2} \end{array} \right.$$

$$L_e = 10$$

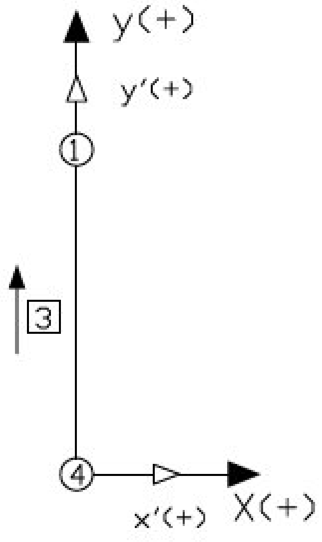

FIG 8.33-6: Elemento 3

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje X global.

$$\lambda_x := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_e} \end{array} \right. \qquad \lambda_x = 0$$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje Y global.

$$\lambda_y := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_e} \end{array} \right. \qquad \lambda_y = 1$$

- Matriz de rigidez de un miembro de armadura en sistema local

área de la sección transversal del elemento

$$A_t := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ A_t \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

Módulo de elasticidad del elemento

$$E := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$A_t = 1 \times 10^{-3}$ $E = 2 \times 10^{11}$

y la matriz de rigidez local del elemento es:

$$k := \frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 10^7$$

- matriz de trasformación de desplazamientos.

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \quad T_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_e^{\,T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- finalmente, la matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es $K_e := T_e^{\,T} \cdot k \cdot T_e$

$$K_e = \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{0.001 \cdot 200000000000}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0e7 & 0 & -2.0e7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.0e7 & 0 & 2.0e7 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{A_t \cdot E}{L_e}$$

3.2.4 matriz de rigidez global del miembro 4

$\mathrm{Elem} := 4$

- Longitud del elemento

$$L_e := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_e \leftarrow \sqrt{(xi-xf)^2+(yi-yf)^2} \end{array} \right.$$

$L_e = 14.142$

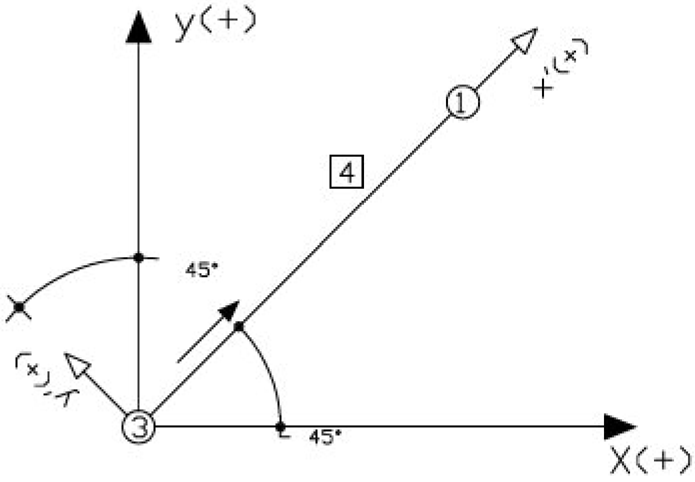

FIG 8.33-7: Elemento 4

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje X global.

$$\lambda_x := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf-xi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_x = 0.707$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje Y global.

$$\lambda_y := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf-yi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_y = 0.707$

- Matriz de rigidez de un miembro de armadura en sistema local

área de la sección transversal del elemento

$$A_t := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ A_t \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

Módulo de elasticidad del elemento

$$E := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$A_t = 1 \times 10^{-3}$ $\qquad\qquad$ $E = 2 \times 10^{11}$

y la matriz de rigidez local del elemento es:

$$k := \frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 10^7$$

- matriz de trasformación de desplazamientos.

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \quad T_e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad T_e^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- finalmente, la matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es $K_e := T_e^{\,T} \cdot k \cdot T_e$

$$K_e = \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{0.001 \cdot 200000000000}{10 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} \\ 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} \\ -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} \\ -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{A_t \cdot E}{L_e}$$

3.2.5 matriz de rigidez global del miembro 5

$\text{Elem} := 5$

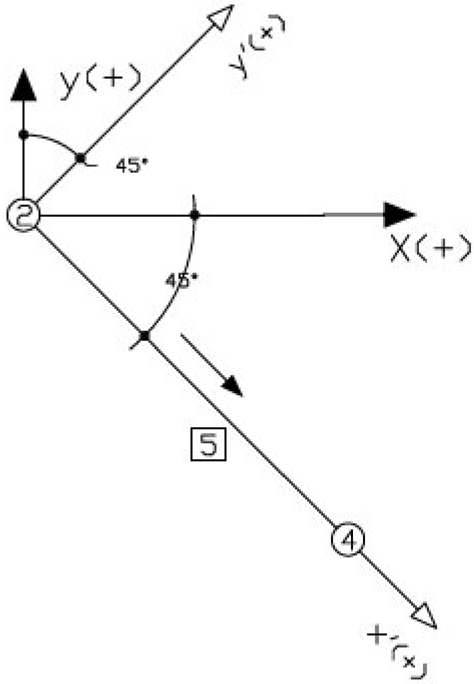

FIG 8.33-8: Elemento 5

- Longitud del elemento

$$L_e := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_e \leftarrow \sqrt{(xi - xf)^2 + (yi - yf)^2} \end{array} \right.$$

$L_e = 14.142$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje X global.

$$\lambda_x := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_x = 0.707$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje Y global.

$$\lambda_y := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elem,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elem,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_e} \end{array} \right.$$

$\lambda_y = -0.707$

- Matriz de rigidez de un miembro de armadura en sistema local

área de la sección transversal del elemento

$$A_t := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ A_t \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

Módulo de elasticidad del elemento

$$E := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elem,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$A_t = 1 \times 10^{-3}$ $E = 2 \times 10^{11}$

y la matriz de rigidez local del elemento es:

$$k := \frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad k = \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 \\ -0.707 & 0.707 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 10^7$$

- matriz de trasformación de desplazamientos.

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix} \quad T_e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad T_e^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- finalmente, la matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es $K_e := T_e^{T} \cdot k \cdot T_e$

$$K_e = \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}^{T} \cdot \left[\frac{A_t \cdot E}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{T} \cdot \left[\frac{0.001 \cdot 200000000000}{10 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} \\ -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} \\ -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} \\ 5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & -5.0e6 \cdot \sqrt{2} & 5.0e6 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{A_t \cdot E}{L_e}$$

4. Ensamblando la matriz de rigidez de la estructura. K=k1+k2+...+k5

- Longitudes para cada elemento:

$$L := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(MEMB) \\ \quad \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{i,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{i,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_i \leftarrow \sqrt{(xi - xf)^2 + (yi - yf)^2} \end{array} \right. \\ L \end{array} \right.$$

$$L = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 14.142 \\ 14.142 \end{pmatrix}$$

- Cuadrado de los cosenos directores(λx^2 y λy^2) para cada elemento.

$$\lambda x2 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(MEMB) \\ \quad \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{i,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{i,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda x2_i \leftarrow \left(\dfrac{xf - xi}{L_i} \right)^2 \end{array} \right. \\ \lambda x2 \end{array} \right.$$

$$\lambda y2 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(MEMB) \\ \quad \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{i,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{i,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda y2_i \leftarrow \left(\dfrac{yf - yi}{L_i} \right)^2 \end{array} \right. \\ \lambda y2 \end{array} \right.$$

$$\lambda x2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda y2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

- Popiedades para cada elemento

$$P := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(MEMB) \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow MEMB_{i,3} \\ P_{i,1} \leftarrow PROP_{p,1} \\ P_{i,2} \leftarrow PROP_{p,2} \end{array} \right. \\ P \end{array} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{11} \\ 1 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{11} \\ 1 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{11} \\ 1 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{11} \\ 1 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{11} \end{pmatrix}$$

- Multiplicando los cosenos directores.($\lambda x * \lambda y$)

$$\lambda xy := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\text{rows}(MEMB) \\ \quad \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{i,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{i,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda xy_i \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_i} \cdot \dfrac{yf - yi}{L_i} \end{array} \right. \\ \lambda xy \end{array} \right.$$

$$\lambda xy = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Comprobando la multiplicación

$$\sqrt{\lambda x2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix} \qquad \sqrt{\lambda y2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\sqrt{\lambda x2 \cdot \lambda y2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

- Obteniendo los productos finales

$$\lambda x2P := \overrightarrow{\frac{P^{\langle 1 \rangle} P^{\langle 2 \rangle}}{L} \lambda x2} \qquad \lambda y2P := \overrightarrow{\frac{P^{\langle 1 \rangle} P^{\langle 2 \rangle}}{L} \lambda y2} \qquad \lambda xyP := \overrightarrow{\frac{P^{\langle 1 \rangle} P^{\langle 2 \rangle}}{L} \lambda xy}$$

$$\lambda x2P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \times 10^{7} \\ 0 \\ 7.071 \times 10^{6} \\ 7.071 \times 10^{6} \end{pmatrix} \qquad \lambda y2P = \begin{pmatrix} 2 \times 10^{7} \\ 0 \\ 2 \times 10^{7} \\ 7.071 \times 10^{6} \\ 7.071 \times 10^{6} \end{pmatrix} \qquad \lambda xyP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7.071 \times 10^{6} \\ -7.071 \times 10^{6} \end{pmatrix}$$

- Finalmente ensamblando la matriz de rigidez total

  Formando la matriz de ceros

$$
Kt := \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 1..\,\text{rows}(NODE)\cdot 2 \\
\quad Kt_{i,i} \leftarrow 0 \\
Kt
\end{array}
\right.
$$

programa que ensambla la matriz de rigidez de la estructura total, respecto al sistema global, a partir de los argumentos establecidos.

$$
Kt := \left|
\begin{array}{lr}
\text{for } i \in 1..\,\text{rows}(MEMB) & \\
\quad ni \leftarrow MEMB_{i,1} & \\
\quad nf \leftarrow MEMB_{i,2} & \\
\quad Kt_{2\cdot ni-1,\,2\cdot ni-1} \leftarrow Kt_{2\cdot ni-1,\,2\cdot ni-1} + \lambda x2P_i & \text{Columna 2ni-1} \\
\quad Kt_{2ni,\,2\cdot ni-1} \leftarrow Kt_{2ni,\,2\cdot ni-1} + \lambda xyP_i & \\
\quad Kt_{2nf-1,\,2\cdot ni-1} \leftarrow Kt_{2nf-1,\,2\cdot ni-1} - \lambda x2P_i & \\
\quad Kt_{2nf,\,2\cdot ni-1} \leftarrow Kt_{2nf,\,2\cdot ni-1} - \lambda xyP_i & \\
\quad Kt_{2\cdot ni-1,\,2ni} \leftarrow Kt_{2\cdot ni-1,\,2ni} + \lambda xyP_i & \text{Columna 2ni} \\
\quad Kt_{2ni,\,2ni} \leftarrow Kt_{2ni,\,2ni} + \lambda y2P_i & \\
\quad Kt_{2nf-1,\,2ni} \leftarrow Kt_{2nf-1,\,2ni} - \lambda xyP_i & \\
\quad Kt_{2nf,\,2ni} \leftarrow Kt_{2nf,\,2ni} - \lambda y2P_i & \\
\quad Kt_{2\cdot ni-1,\,2nf-1} \leftarrow Kt_{2\cdot ni-1,\,2nf-1} - \lambda x2P_i & \text{Columna 2nf-1} \\
\quad Kt_{2ni,\,2nf-1} \leftarrow Kt_{2ni,\,2nf-1} - \lambda xyP_i & \\
\quad Kt_{2nf-1,\,2nf-1} \leftarrow Kt_{2nf-1,\,2nf-1} + \lambda x2P_i & \\
\quad Kt_{2nf,\,2nf-1} \leftarrow Kt_{2nf,\,2nf-1} + \lambda xyP_i & \\
\quad Kt_{2\cdot ni-1,\,2nf} \leftarrow Kt_{2\cdot ni-1,\,2nf} - \lambda xyP_i & \text{Columna 2nf} \\
\quad Kt_{2ni,\,2nf} \leftarrow Kt_{2ni,\,2nf} - \lambda y2P_i & \\
\quad Kt_{2nf-1,\,2nf} \leftarrow Kt_{2nf-1,\,2nf} + \lambda xyP_i & \\
\quad Kt_{2nf,\,2nf} \leftarrow Kt_{2nf,\,2nf} + \lambda y2P_i & \\
Kt &
\end{array}
\right.
$$

$$Kt = \begin{pmatrix} 0.135 & 0.035 & -0.1 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & 0 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0.035 \\ 0 & 0 & -0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & 0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 & 0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 & 0.035 & -0.035 \\ 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0.135 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot 10^{8}$$

5. Imposición de las condiciones de soporte

Analizando la estructura, se observa, que de las 8 incógnitas(8 desplazamientos posibles - 2 desplazamientos por nudo) 4 son conocidos e iguales a cero, en los nudos donde existe el soporte, entonces, estableciendo las condiciones de contorno.

```
Ks := | for i ∈ 1 .. rows(NODE)·2
      |   Ks[i,i] ← 0
      | Ks

Ks := | for i ∈ 1 .. rows(SUPP)
      |   | n ← SUPP[i,1]
      |   | Ks[2n-1,2n-1] ← ∞  if 1 = SUPP[i,2]
      |   | Ks[2n,2n] ← ∞  if 1 = SUPP[i,3]
      | Ks
```

$$Ks = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times 10^{307} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times 10^{307} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times 10^{307} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times 10^{307} \end{pmatrix}$$

$Km := Kt + Ks$

$$Km = \begin{pmatrix} 0.135 & 0.035 & -0.1 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & 0 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 \\ -0.1 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0.035 \\ 0 & 0 & -0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & 5\times 10^{298} & 0.035 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 & 0.035 & 5\times 10^{298} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 & 5\times 10^{298} & -0.035 \\ 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 5\times 10^{298} \end{pmatrix} \cdot 2\cdot 10^{8}$$

5. Obteniendo los desplazamientos en los nudos de la estructura, en el sistema global

Ya que Km y Fe no son más que los coeficientes y los términos independientes del sistema de ecuaciones formados en cada nudo, tomando en cuenta los desplazamientos para cada grado de libertad, hay muchas formas de resolver el sistema de ecuaciones lineales.

- Formando la matriz aumentada

$$Ma := \mathrm{augment}\left(Km, F_e\right)$$

$$Ma = \begin{pmatrix} 0.135 & 0.035 & -0.1 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & 0 \\ 0.035 & 0.135 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 & -2.5\times 10^{-5} \\ -0.1 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0.035 & 4\times 10^{-5} \\ 0 & 0 & -0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & 0 & 5\times 10^{298} & 0.035 & 0 & 0 & 0 \\ -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 & 0.035 & 5\times 10^{298} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 & 5\times 10^{298} & -0.035 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 5\times 10^{298} & 0 \end{pmatrix} \cdot 2\cdot 10^{8}$$

- La matriz aumentada en su forma escolanada reducida

$$
\mathrm{rref}(Ma) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.167\times 10^{-4} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.98\times 10^{-4} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.647\times 10^{-4} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.52\times 10^{-4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

- Donde la solución es la última columna, el vector de desplazamientos

$$
D := \mathrm{rref}(Ma)^{\langle \mathrm{cols}(Ma)\rangle}
$$

$$
D = \begin{pmatrix}
8.167\times 10^{-4} \\
-3.98\times 10^{-4} \\
9.647\times 10^{-4} \\
2.52\times 10^{-4} \\
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
1x \\ 1y \\ 2x \\ 2y \\ 3x \\ 3y \\ 4x \\ 4y
\end{pmatrix}
$$

6. Obteniendo las reacciones de los apoyos

Conocido los desplazamientos y la matriz de rigidez de la estructura Kt, de la ecuación fundamental del método de la figidez. F=KD

- la matriz de rigidez de la estructura

$$
Kt = \begin{pmatrix}
0.135 & 0.035 & -0.1 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & 0 \\
0.035 & 0.135 & 0 & 0 & -0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 \\
-0.1 & 0 & 0.135 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0.035 \\
0 & 0 & -0.035 & 0.135 & 0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 \\
-0.035 & -0.035 & 0 & 0 & 0.035 & 0.035 & 0 & 0 \\
-0.035 & -0.035 & 0 & -0.1 & 0.035 & 0.135 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.035 & 0.035 & 0 & 0 & 0.035 & -0.035 \\
0 & -0.1 & 0.035 & -0.035 & 0 & 0 & -0.035 & 0.135
\end{pmatrix} 2\cdot 10^{8}
$$

- el vector de desplazamientos

$$D = \begin{pmatrix} 8.167\times 10^{-4} \\ -3.98\times 10^{-4} \\ 9.647\times 10^{-4} \\ 2.52\times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplicando FF=Kt*D $\quad FF := Kt\cdot D$

$$FF = \begin{pmatrix} -3.638\times 10^{-12} \\ -5\times 10^{3} \\ 8\times 10^{3} \\ -1.819\times 10^{-12} \\ -2.96\times 10^{3} \\ -8\times 10^{3} \\ -5.04\times 10^{3} \\ 1.3\times 10^{4} \end{pmatrix}$$

- Ordenando las reacciones

$$REAC := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 .. \text{rows}(SUPP) \\ \quad \left| \begin{array}{l} n \leftarrow SUPP_{i,1} \\ Rx \leftarrow FF_{2n-1} \\ Ry \leftarrow FF_{2n} \\ REAC_{i,1} \leftarrow n \\ REAC_{i,2} \leftarrow Rx \\ REAC_{i,3} \leftarrow Ry \end{array} \right. \\ REAC \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Nudo} & Rx & Ry \end{array} \\ REAC = & \begin{pmatrix} 3 & -2.96\times 10^{3} & -8\times 10^{3} \\ 4 & -5.04\times 10^{3} & 1.3\times 10^{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

7. Obteniendo las fuerzas actuantes en cada elemento

7.1 Elemento #1.

$Elm := 1$

- Obteniendo los desplazamientos en los extremos de los nudos.

$$De := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ De_1 \leftarrow D_{2ni-1} \\ De_2 \leftarrow D_{2ni} \\ De_3 \leftarrow D_{2nf-1} \\ De_4 \leftarrow D_{2nf} \end{array} \right. \qquad De = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.64694 \times 10^{-4} \\ 2.51982 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema local

Área de la sección transversal

$$A_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ A_e \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

$A_\iota = 0.001$

Módulo de elasticidad (E)

$$E_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$E_\iota = 2 \times 10^{11}$

Longitud del elemento

$$L_\iota := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_\iota \leftarrow \sqrt{(xi-xf)^2 + (yi-yf)^2} \end{array} \right.$$

$L_\iota = 10$

y la matriz está definido como

$$k_e := \frac{A_\iota \cdot E_\iota}{L_\iota} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \frac{0.001 \cdot 200000000000}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} A_\iota \cdot E_\iota$$

- Matriz de transformación de desplazamientos

$$\lambda_{xx} := \begin{array}{|l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_\iota} \end{array} \qquad \lambda_{yy} := \begin{array}{|l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_\iota} \end{array}$$

$$\lambda_{xx} = 0 \qquad \lambda_{yy} = 1$$

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}$$

$$T_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La fuerza en la barra está dado por:

$$q := k_e \cdot T_e \cdot De$$

$$q = \begin{pmatrix} -5039.63862 \\ 5039.63862 \end{pmatrix} \qquad \text{Newtons}$$

7.2 Elemento #2.

$$Elm := 2$$

- Obteniendo los desplazamientos en los extremos de los nudos.

$$De := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ De_1 \leftarrow D_{2ni-1} \\ De_2 \leftarrow D_{2ni} \\ De_3 \leftarrow D_{2nf-1} \\ De_4 \leftarrow D_{2nf} \end{array} \right. \qquad De = \begin{pmatrix} 9.64694 \times 10^{-4} \\ 2.51982 \times 10^{-4} \\ 8.16676 \times 10^{-4} \\ -3.98018 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema local

Área de la sección transversal

$$A_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ A_e \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

$$A_\iota = 0.001$$

Módulo de elasticidad (E)

$$E_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$$E_\iota = 2 \times 10^{11}$$

Longitud del elemento

$$L_\iota := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_\iota \leftarrow \sqrt{(xi - xf)^2 + (yi - yf)^2} \end{array} \right.$$

$$L_\iota = 10$$

y la matriz está definido como

$$k_e := \frac{A_\iota \cdot E_\iota}{L_\iota} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \frac{0.001 \cdot 200000000000}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot A_\iota \cdot E_\iota$$

- Matriz de transformación de desplazamientos

$$\lambda_{xx} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_\iota} \end{array} \right. \qquad \lambda_{yy} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_\iota} \end{array} \right.$$

$$\lambda_{xx} = 1 \qquad \lambda_{yy} = 0$$

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}$$

$$T_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La fuerza en la barra está dado por:

$$q := k_e \cdot T_e \cdot De$$

$$q = \begin{pmatrix} 2960.36138 \\ -2960.36138 \end{pmatrix} \quad \text{Newtons}$$

7.3 Elemento #3.

$$Elm := 3$$

- Obteniendo los desplazamientos en los extremos de los nudos.

$$De := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ De_1 \leftarrow D_{2ni-1} \\ De_2 \leftarrow D_{2ni} \\ De_3 \leftarrow D_{2nf-1} \\ De_4 \leftarrow D_{2nf} \end{array} \right. \qquad De = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.16676 \times 10^{-4} \\ -3.98018 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema local

Área de la sección transversal

$$A_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ A_e \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

$$A_\iota = 0.001$$

Módulo de elasticidad (E)

$$E_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$$E_\iota = 2 \times 10^{11}$$

Longitud del elemento

$$L_\iota := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_\iota \leftarrow \sqrt{(xi - xf)^2 + (yi - yf)^2} \end{array} \right.$$

$$L_\iota = 10$$

y la matriz está definido como

$$k_e := \frac{A_\iota \cdot E_\iota}{L_\iota} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \frac{0.001 \cdot 200000000000}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot A_\iota \cdot E_\iota$$

- Matriz de transformación de desplazamientos

$$\lambda_{xx} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_\iota} \end{array} \right. \qquad \lambda_{yy} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_\iota} \end{array} \right.$$

$$\lambda_{xx} = 0 \qquad \lambda_{yy} = 1$$

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}$$

$$T_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La fuerza en la barra está dado por:

$$q := k_e \cdot T_e \cdot De$$

$$q = \begin{pmatrix} 7960.36138 \\ -7960.36138 \end{pmatrix} \quad \text{Newtons}$$

7.4 Elemento #4.

$$Elm := 4$$

- Obteniendo los desplazamientos en los extremos de los nudos.

$$De := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ De_1 \leftarrow D_{2ni-1} \\ De_2 \leftarrow D_{2ni} \\ De_3 \leftarrow D_{2nf-1} \\ De_4 \leftarrow D_{2nf} \end{array} \right. \qquad De = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.16676 \times 10^{-4} \\ -3.98018 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema local

Área de la sección transversal

$$A_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ A_e \leftarrow PROP_{prop,1} \end{array} \right.$$

$$A_\iota = 0.001$$

Módulo de elasticidad (E)

$$E_\iota := \left| \begin{array}{l} prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ E \leftarrow PROP_{prop,2} \end{array} \right.$$

$$E_\iota = 2 \times 10^{11}$$

Longitud del elemento

$$L_\iota := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ L_\iota \leftarrow \sqrt{(xi - xf)^2 + (yi - yf)^2} \end{array} \right.$$

$$L_\iota = 14.14214$$

y la matriz está definido como

$$k_e := \frac{A_\iota \cdot E_\iota}{L_\iota} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \frac{0.001 \cdot 200000000000}{10 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 0.07071 & -0.07071 \\ -0.07071 & 0.07071 \end{pmatrix} \cdot A_\iota \cdot E_\iota$$

- Matriz de transformación de desplazamientos

$$\lambda_{xx} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_\iota} \end{array} \right. \qquad \lambda_{yy} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_\iota} \end{array} \right.$$

$$\lambda_{xx} = 0.70711 \qquad \lambda_{yy} = 0.70711$$

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}$$

$$T_e = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- La fuerza en la barra está dado por:

$$q := k_e \cdot T_e \cdot De$$

$$q = \begin{pmatrix} -4186.58321 \\ 4186.58321 \end{pmatrix} \quad \text{Newtons}$$

7.5 Elemento #5.

$$\mathrm{Elm} := 5$$

- Obteniendo los desplazamientos en los extremos de los nudos.

$$\mathrm{De} := \left| \begin{array}{l} \mathrm{ni} \leftarrow \mathrm{MEMB}_{\mathrm{Elm},1} \\ \mathrm{nf} \leftarrow \mathrm{MEMB}_{\mathrm{Elm},2} \\ \mathrm{De}_1 \leftarrow \mathrm{D}_{2\mathrm{ni}-1} \\ \mathrm{De}_2 \leftarrow \mathrm{D}_{2\mathrm{ni}} \\ \mathrm{De}_3 \leftarrow \mathrm{D}_{2\mathrm{nf}-1} \\ \mathrm{De}_4 \leftarrow \mathrm{D}_{2\mathrm{nf}} \end{array} \right. \qquad \mathrm{De} = \begin{pmatrix} 9.64694 \times 10^{-4} \\ 2.51982 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema local

Área de la sección transversal

$$A_\iota := \left| \begin{array}{l} \mathrm{prop} \leftarrow \mathrm{MEMB}_{\mathrm{Elm},3} \\ A_e \leftarrow \mathrm{PROP}_{\mathrm{prop},1} \end{array} \right.$$

$$A_\iota = 0.001$$

Módulo de elasticidad (E)

$$E_\iota := \left| \begin{array}{l} \mathrm{prop} \leftarrow \mathrm{MEMB}_{\mathrm{Elm},3} \\ E \leftarrow \mathrm{PROP}_{\mathrm{prop},2} \end{array} \right.$$

$$E_\iota = 2 \times 10^{11}$$

Longitud del elemento

$$L_\iota := \left| \begin{array}{l} \mathrm{ni} \leftarrow \mathrm{MEMB}_{\mathrm{Elm},1} \\ \mathrm{nf} \leftarrow \mathrm{MEMB}_{\mathrm{Elm},2} \\ \mathrm{xi} \leftarrow \mathrm{NODE}_{\mathrm{ni},1} \\ \mathrm{xf} \leftarrow \mathrm{NODE}_{\mathrm{nf},1} \\ \mathrm{yi} \leftarrow \mathrm{NODE}_{\mathrm{ni},2} \\ \mathrm{yf} \leftarrow \mathrm{NODE}_{\mathrm{nf},2} \\ L_\iota \leftarrow \sqrt{(\mathrm{xi}-\mathrm{xf})^2 + (\mathrm{yi}-\mathrm{yf})^2} \end{array} \right.$$

$$L_\iota = 14.14214$$

y la matriz está definido como

$$k_e := \frac{A_\iota \cdot E_\iota}{L_\iota} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \frac{0.001 \cdot 200000000000}{10 \cdot \sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 0.07071 & -0.07071 \\ -0.07071 & 0.07071 \end{pmatrix} \cdot A_\iota \cdot E_\iota$$

- Matriz de transformación de desplazamientos

$$\lambda_{xx} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ \lambda_x \leftarrow \dfrac{xf - xi}{L_\iota} \end{array} \right. \qquad \lambda_{yy} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ \lambda_y \leftarrow \dfrac{yf - yi}{L_\iota} \end{array} \right.$$

$$\lambda_{xx} = 0.70711 \qquad \lambda_{yy} = -0.70711$$

$$T_e := \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix}$$

$$T_e = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

- La fuerza en la barra está dado por:

$$q := k_e \cdot T_e \cdot De$$

$$q = \begin{pmatrix} 7127.12528 \\ -7127.12528 \end{pmatrix} \quad \text{Newtons}$$

Resumiendo los resultados.

Elemento	Nudo	Fuerza Axial (N)	
1	3	-5039.6386	tensión
	2	5039.6386	
2	2	2960.3614	compresión
	1	-2960.3614	
3	4	7960.3614	compresión
	1	-7960.3614	
4	3	-4186.5832	tensión
	1	4186.5832	
5	2	7127.1253	compresión
	4	-7127.1253