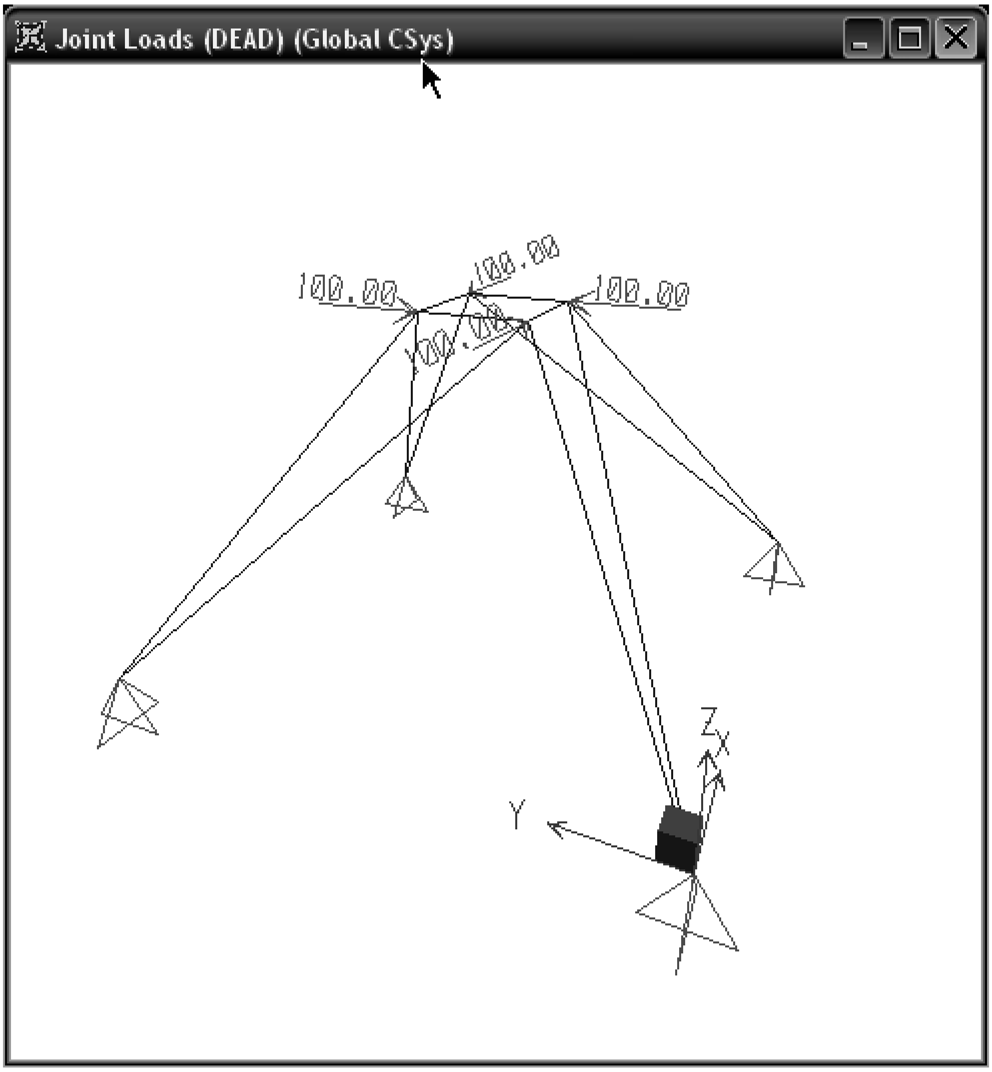
ANALISIS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS DE CERCHAS EN 3D

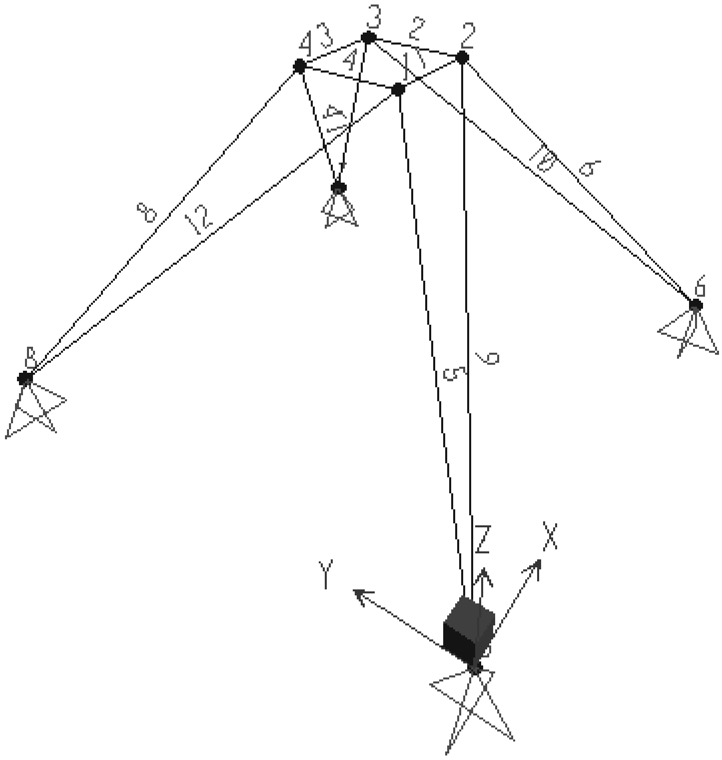
Autor: Edmundo Canchari Gutiérrez
Visite:
http://cgedmundo.wordpress.com
Comentarios:
cgedmundo@gmail.com

La estructura mostrada es una cercha en tres dimensiones, obtener: los desplazamientos en los nudos, reacciones en los apoyos y las fuerzas en cada elemento. Las propiedades de la sección transversal de cada elemento y las coordenadas de cada nudo se encuentran detallados en la sección #2.



1. Generalidades

El sistema de coordenadas de referencia global es el que se muestra, el sistema local de cada elemento está establecido por la identificación del nudo inicial y final, la numeración de las barras y nudos es la que se muestra en la siguiente figura.



2 Argumentos

2.1 Nudos

Cada fila representa las coordenadas de un nudo y las columnas son:
Columna 1: coordenada "x" global del nudo.
Columna 2: coordenada "y" global del nudo.
Columna 3: coordenada "z" global del nudo

NODE :=

	1	2	3
1	4	4	6
2	6	4	6
3	6	6	6
4	4	6	6
5	0	0	0
6	10	0	0
7	10	10	0
8	0	10	0

2.2 Propiedades de los elementos

Las propiedades de la sección trasversal de los elementos y del tipo de material, cada fila

representa una propiedad distinta y las columnas son:
Columna 1: Área de la sección trasversal del elemento.
Columna 2: Módulo de elasticidad del amterial.

PROP :=

	1	2
1	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{8}$
2	0.01	$2 \cdot 10^{8}$
3	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{8}$

2.3 Elementos

Cada fila representa una barra, contiene la información de la conectividad del elemento dentro del sistema, cada columna representa:
Columna 1: nudo inicial del elemento.
Columna 2: nudo final del elemento.
Columna 3: número de propiedad del elemento.

MEMB :=

	1	2	3
1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	1	1
5	5	1	2
6	5	2	3
7	6	2	2
8	6	3	3
9	7	3	2
10	7	4	3
11	8	4	2
12	8	1	3

2.4 Restricciones\Apoyos

Cada fila representa un apoyo de la estructura, las columnas informan el comportamiento para cada grado de libertad, la convensión es:

- "1" para los grados de libertad de desplazamiento restringido.
- "0" para los grados de libertad donde existe desplazamiento libre.

Cada Columna representa:
Columna 1: número del nudo donde existe el apoyo.
Columna 2: "ux?" información del desplazamiento en la dirección "x" global.
Columna 3: "uy?" información del desplazamiento en la dirección "y" global.
Columna 4: "uz?" información del desplazamiento en la dirección "z" global.

SUPP :=

	1	2	3	4
1	5	1	1	1

2	6	1	1	1
3	7	1	1	1
4	8	1	1	1

2.5 Cargas

Se admite cargas en los nudos y cada columna representa:
Columna 1: número del nudo en que actúa la carga.
Columna 2: carga puntual en la dirección "x" global.
Columna 3: carga puntual en la dirección "y" global.
Columna 4: carga puntual en la dirección "z" global.
Se debe ingresar considerando la orientación global del sistema.

NLF :=

	1	2	3	4
1	1	100	0	0
2	2	0	100	0
3	3	-100	0	0
4	4	0	-100	0

2.6 Asentamiento en nudos

Los asentamientos a lo que puede estar sometido cada nudo de la estrctura.
Columna 1: número de nudo
Columna 2: asentamiento en la dirección "x" global
Columna 3: asentamiento en la dirección "y" global
Columna 4: asentamiento en la dirección "z" global

ASEN :=

	1	2	3	4
1	5	0	$1\cdot10^{-4}$	0

3. Matriz de rigidez para cada elemento

Reference:D:\FEM\Cerchas3D\0 Cechas3D Funciones.xmcd

Para el elemento #: $m := 5$

3.1Obteniendo la matriz de rigidez local para el elemento

- Longitud del elemento

  $L(m) = 8.246$

- Área de su sección transversal

  $A(m) = 0.01$

- Módulo de elsticidad del amterial

  $E(m) = 2 \times 10^{8}$

la matriz de rigidez en su sistema local es

$$k_e(m) = \begin{pmatrix} 2.425 \times 10^{5} & -2.425 \times 10^{5} \\ -2.425 \times 10^{5} & 2.425 \times 10^{5} \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz de tranformación local - global

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "x" global.

$$\frac{x_f(m) - x_i(m)}{L(m)} = \frac{4-0}{2\cdot\sqrt{17}} \qquad \lambda x(m) = 0.485$$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "y" global.

$$\frac{y_f(m) - y_i(m)}{L(m)} = \frac{4-0}{2\cdot\sqrt{17}} \qquad \lambda y(m) = 0.485$$

- Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "z" global.

$$\frac{z_f(m) - z_i(m)}{L(m)} = \frac{6-0}{2\cdot\sqrt{17}} \qquad \lambda y(m) = 0.485$$

Ordenando

$$T(m) = \begin{pmatrix} 0.485 & 0.485 & 0.728 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.485 & 0.485 & 0.728 \end{pmatrix}$$

3.3 Matriz de rigidez respecto al sistema de orientación global

Está dado por

$$ke(m) := T(m)^T \cdot k_e(m) \cdot T(m)$$

$$ke(m) = \begin{pmatrix} 5.707\times10^4 & 5.707\times10^4 & 8.56\times10^4 & -5.707\times10^4 & -5.707\times10^4 & -8.56\times10^4 \\ 5.707\times10^4 & 5.707\times10^4 & 8.56\times10^4 & -5.707\times10^4 & -5.707\times10^4 & -8.56\times10^4 \\ 8.56\times10^4 & 8.56\times10^4 & 1.284\times10^5 & -8.56\times10^4 & -8.56\times10^4 & -1.284\times10^5 \\ -5.707\times10^4 & -5.707\times10^4 & -8.56\times10^4 & 5.707\times10^4 & 5.707\times10^4 & 8.56\times10^4 \\ -5.707\times10^4 & -5.707\times10^4 & -8.56\times10^4 & 5.707\times10^4 & 5.707\times10^4 & 8.56\times10^4 \\ -8.56\times10^4 & -8.56\times10^4 & -1.284\times10^5 & 8.56\times10^4 & 8.56\times10^4 & 1.284\times10^5 \end{pmatrix}$$

... de igual manera para cada elemento. La matriz global ensamblada resulta

K =

	20	21	22	23	24
9	$8.56\cdot10^4$	$-1.284\cdot10^5$	0	0	0
10	$-5.815\cdot10^3$	$8.722\cdot10^3$	$-5.707\cdot10^4$	$5.707\cdot10^4$	$-8.56\cdot10^4$
11	$-3.876\cdot10^3$	$5.815\cdot10^3$	$5.707\cdot10^4$	$-5.707\cdot10^4$	$8.56\cdot10^4$
12	$5.815\cdot10^3$	$-8.722\cdot10^3$	$-8.56\cdot10^4$	$8.56\cdot10^4$	$-1.284\cdot10^5$
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0
19	$6.288\cdot10^4$	$-9.432\cdot10^4$	0	0	0
20	$6.094\cdot10^4$	$-9.142\cdot10^4$	0	0	0
21	$-9.142\cdot10^4$	$1.371\cdot10^5$	0	0	0
22	0	0	$6.094\cdot10^4$	$-6.288\cdot10^4$	$9.142\cdot10^4$
23	0	0	$-6.288\cdot10^4$	$6.579\cdot10^4$	$-9.432\cdot10^4$
24	0	0	$9.142\cdot10^4$	$-9.432\cdot10^4$	...

4. Vector de fuerzas.

Reference:D:\FEM\Cerchas3D\0 Cechas3D Funciones.xmcd

Ensamblando convenientemente según los grados de libertad, el vector resulta

$$F^T = (100 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 100 \;\; 0 \;\; -100 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -100 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)$$

5. Desplazamientos de los nudos

5.1 Imponiendo las condiciones de contorno, sobre la matriz de rigidez

Km =

	20	21	22	23	24
9	$8.56\cdot10^{4}$	$-1.284\cdot10^{5}$	0	0	0
10	$-5.815\cdot10^{3}$	$8.722\cdot10^{3}$	$-5.707\cdot10^{4}$	$5.707\cdot10^{4}$	$-8.56\cdot10^{4}$
11	$-3.876\cdot10^{3}$	$5.815\cdot10^{3}$	$5.707\cdot10^{4}$	$-5.707\cdot10^{4}$	$8.56\cdot10^{4}$
12	$5.815\cdot10^{3}$	$-8.722\cdot10^{3}$	$-8.56\cdot10^{4}$	$8.56\cdot10^{4}$	$-1.284\cdot10^{5}$
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0
19	$6.288\cdot10^{4}$	$-9.432\cdot10^{4}$	0	0	0
20	$1\cdot10^{307}$	$-9.142\cdot10^{4}$	0	0	0
21	$-9.142\cdot10^{4}$	$1\cdot10^{307}$	0	0	0
22	0	0	$1\cdot10^{307}$	$-6.288\cdot10^{4}$	$9.142\cdot10^{4}$
23	0	0	$-6.288\cdot10^{4}$	$1\cdot10^{307}$	$-9.432\cdot10^{4}$
24	0	0	$9.142\cdot10^{4}$	$-9.432\cdot10^{4}$	...

5.2 Imponiendo las condiciones de contorno, sobre el vector de fuerzas

$$Fm^T = \left(100 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 100 \;\; 0 \;\; -100 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -100 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1\times10^{303} \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0\right)$$

5.2 Formando la matriz aumentada

	21	22	23	24	25
1	0	$-3.876\cdot10^{3}$	$5.815\cdot10^{3}$	$-5.815\cdot10^{3}$	100
2	0	$5.815\cdot10^{3}$	$-8.722\cdot10^{3}$	$8.722\cdot10^{3}$	0
3	0	$-5.815\cdot10^{3}$	$8.722\cdot10^{3}$	$-8.722\cdot10^{3}$	0
4	0	0	0	0	0

5	0	0	0	0	100
6	0	0	0	0	0
7	$8.56\cdot10^{4}$	0	0	0	-100
8	$8.56\cdot10^{4}$	0	0	0	0
9	$-1.284\cdot10^{5}$	0	0	0	0
10	$8.722\cdot10^{3}$	$-5.707\cdot10^{4}$	$5.707\cdot10^{4}$	$-8.56\cdot10^{4}$	0
11	$5.815\cdot10^{3}$	$5.707\cdot10^{4}$	$-5.707\cdot10^{4}$	$8.56\cdot10^{4}$	-100
12	$-8.722\cdot10^{3}$	$-8.56\cdot10^{4}$	$8.56\cdot10^{4}$	$-1.284\cdot10^{5}$	0
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	$1\cdot10^{303}$
15	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	...

augment(Km, Fm) =

5.3 El sistema de ecuaciones en su forma escalonada reducida

$$s_a := \mathrm{rref}(\mathrm{augment}(Km, Fm))$$

$s_a =$

	21	22	23	24	25
1	0	0	0	0	$4.948\cdot10^{-3}$
2	0	0	0	0	$-4.368\cdot10^{-3}$
3	0	0	0	0	$-7.873\cdot10^{-4}$
4	0	0	0	0	$4.448\cdot10^{-3}$
5	0	0	0	0	$4.908\cdot10^{-3}$
6	0	0	0	0	$-7.74\cdot10^{-4}$
7	0	0	0	0	$-4.908\cdot10^{-3}$
8	0	0	0	0	$4.408\cdot10^{-3}$
9	0	0	0	0	$-8.006\cdot10^{-4}$
10	0	0	0	0	$-4.408\cdot10^{-3}$
11	0	0	0	0	$-4.868\cdot10^{-3}$
12	0	0	0	0	$-7.74\cdot10^{-4}$
13	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	$1\cdot10^{-4}$
15	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	...

5.4 Los desplazamientos resultan

$D^T =$

	1	2	3	4
1	$4.948\cdot10^{-3}$	$-4.368\cdot10^{-3}$	$-787.285\cdot10^{-6}$	...

Ordenado:

Donde:(en el sistema de oriwntación global)
Columna 1: número del nudo.
Columna 2: desplazamiento en x
Columna 3: desplazamiento en y
Columna 4: desplazamiento en z

$$Dor = \begin{pmatrix} 1 & 4.947937\times 10^{-3} & -4.367937\times 10^{-3} & -7.872853\times 10^{-4} \\ 2 & 4.447937\times 10^{-3} & 4.907937\times 10^{-3} & -7.73952\times 10^{-4} \\ 3 & -4.907937\times 10^{-3} & 4.407937\times 10^{-3} & -8.006186\times 10^{-4} \\ 4 & -4.407937\times 10^{-3} & -4.867937\times 10^{-3} & -7.73952\times 10^{-4} \\ 5 & 0 & 1\times 10^{-4} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Reacciónes en los apoyos.

$$Re := K\cdot D - F$$

$Re^T =$

	1	2	3	4	5
1	$-3.268\cdot 10^{-13}$	$1.226\cdot 10^{-13}$	$-1.776\cdot 10^{-15}$	$2.544\cdot 10^{-13}$	...

$R^T =$

	1	2	3	4	5
1	$-3.268\cdot 10^{-13}$	$1.226\cdot 10^{-13}$	$-1.776\cdot 10^{-15}$	$2.544\cdot 10^{-13}$	...

Ordenando:

Donde:(en el sistema de orientación global)
Columna 1: número de nudo
Columna 2: reacción en x
Columna 3: reacción en y
Columna 4: reacción en z

$$Ror = \begin{pmatrix} 5 & -20 & -5.507\times 10^{-14} & -1.208\times 10^{-13} \\ 6 & -1.004\times 10^{-13} & -20 & 1.465\times 10^{-13} \\ 7 & 20 & -1.865\times 10^{-14} & 0 \\ 8 & -5.684\times 10^{-14} & 20 & -1.137\times 10^{-13} \end{pmatrix}$$

6 Fuerzas en los extremos de los elementos

Reference:D:\FEM\Cerchas3D\0 Cechas3D Funciones.xmcd

Para el elemento: $m := 2$

- matriz de rigidez del elemento respecto al sistema local

$$k_e(m) = \begin{pmatrix} 2\times 10^{5} & -2\times 10^{5} \\ -2\times 10^{5} & 2\times 10^{5} \end{pmatrix}$$

- matriz de tranformación de desplazamientos

$$T(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- vector de desplazamientos en lso etremos del elemento

$$De(m) = \begin{pmatrix} 4.448\times 10^{-3} \\ 4.908\times 10^{-3} \\ -7.74\times 10^{-4} \\ -4.908\times 10^{-3} \\ 4.408\times 10^{-3} \\ -8.006\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

la fuerza en el elemento está dado por:

$$q := k_e(m)\cdot T(m)\cdot De(m)$$

$$q = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \end{pmatrix}$$

.... de igual manera para cada elemento. Ordenado las fuerzas resulta.

Donde:
Columna 1: número que identifica al elemento
Columna 2: fuerza axial

Segundo elemento indica tnsión o compresion

+: tension

Resultados matcad

Resultados desde sap2000 12.0.0

$$q_t = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ 2 & -100 \\ 3 & -100 \\ 4 & -100 \\ 5 & -82.462 \\ 6 & 93.808 \\ 7 & -82.462 \\ 8 & 93.808 \\ 9 & -82.462 \\ 10 & 93.808 \\ 11 & -82.462 \\ 12 & 93.808 \end{pmatrix}$$

TABLE: Element Forces - Frames		
Frame	**OutputCase**	**P**
Text	Text	KN
1	DEAD	-100
2	DEAD	-100
3	DEAD	-100
4	DEAD	-100
5	DEAD	-82.462
6	DEAD	-82.462
7	DEAD	-82.462
8	DEAD	-82.462
9	DEAD	93.808
10	DEAD	93.808
11	DEAD	93.808
12	DEAD	93.808

Los resultados son comprobados con los del programa Sap2000, como se muestra los resultados son los mismos valores.