Ejemplo 4.1 (Página 104)

Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería
Segunda Edición
TITUPATHI R. CHANDRUPATLA – ASHOK D. BELEGUNDU
PRENTICE HALL

Considere la armadura de cuatro barras mostrada en la figura E4.1a. Para todos los elementos E=29.5E6 psi y Ae=1in^2

- determine la matriz de rigidez elemental para cada elemento
- ensamble la matriz de rigidez estructural K para toda la armadura
- Encuentre los desplazamientos nodales
- Calcule las fuerzas de reacción
- Recupere los esfuerzos para cada elemento.

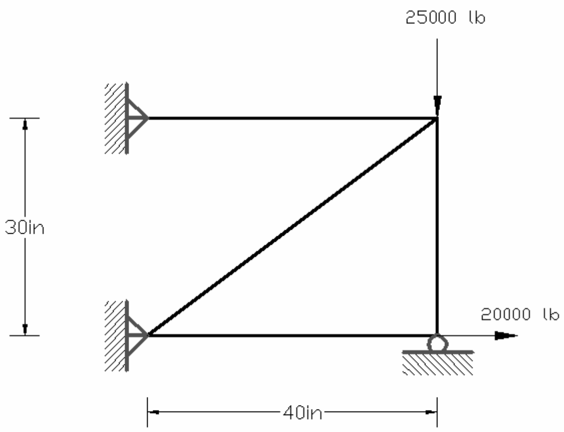
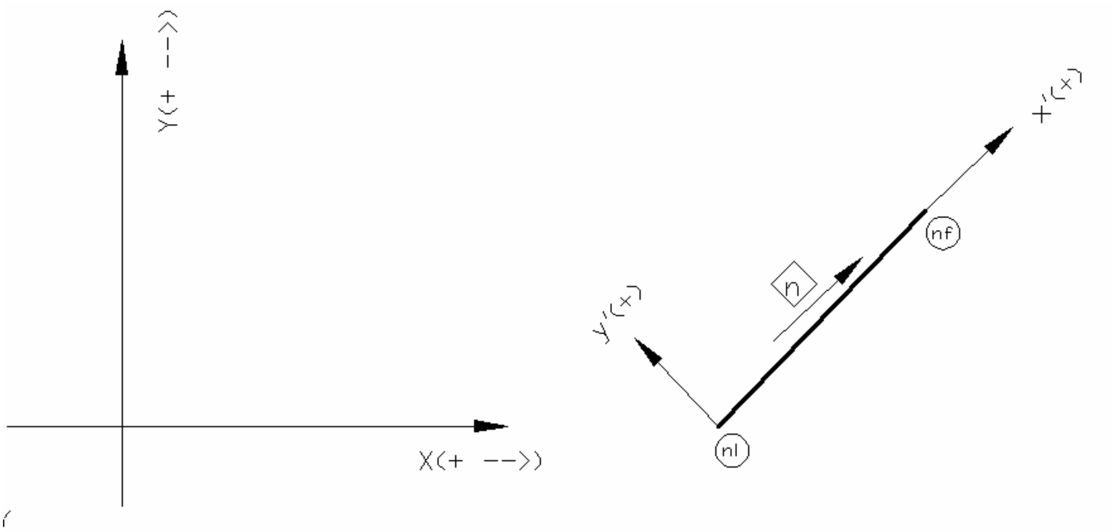


FIGURA E4.1A

Solución:

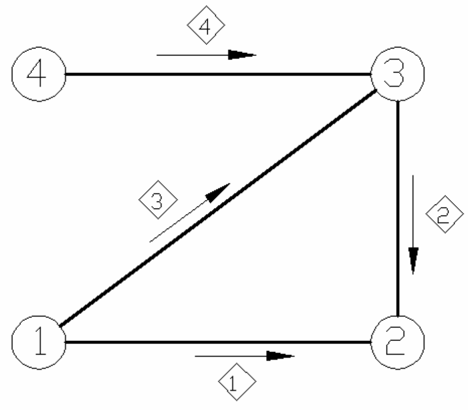
1) Convenciones.

Inicialmente se opta un sistema de coordenada cartesiana ortogonal y el sistema de orientación local para cada elemento, definido por su nudo inicial y final como se muestra.

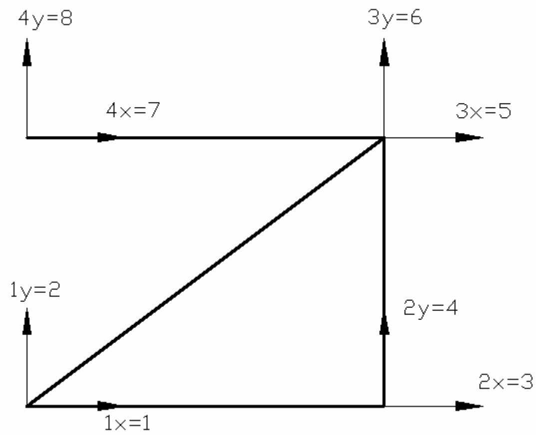


SISTEMA DE COORDENADA GLOBAL SISTEMA DE COORDENADA COCAL PARA CADA ELEMENTO

Luego se divide la estructura en una serie de elementos finitos considerando sus puntos extremos como nudos, se enumera nudos y barras. Cada miembro de la estructura debe estar completamente definido por su nudo inicial y final dentro del sistema.



Según la numeración de los nudos, los grados de libertad son.



Tomando estas convenciones, se ordena los argumentos.

2 Argumentos

2.1 Nudos

Cada fila representa las coordenadas de un nudo y las columnas son:
Columna 1: coordenada "x" global del nudo.
Columna 2: coordenada "y" global del nudo.

NODE :=

	1	2
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

2.2 Propiedades de los elementos

Las propiedades de la sección trasversal de los elementos y del tipo de material, cada fila representa una propiedad distinta y las columnas son:
Columna 1: Área de la sección trasversal del elemento.
Columna 2: Módulo de elasticidad del amterial.

PROP :=

	1	2
1	1	$2.95 \cdot 10^7$

2.3 Elementos

Cada fila representa una barra, contiene la información de la conectividad del elemento dentro del sistema, cada columna representa:
Columna 1: nudo inicial del elemento.
Columna 2: nudo final del elemento.
Columna 3: número de propiedad del elemento.

MEMB :=

	1	2	3
1	1	2	1
2	3	2	1
3	1	3	1
4	4	3	1

2.4 Restricciones\Apoyos

Cada fila representa un apoyo de la estructura, las columnas informan el comportamiento para cada grado de libertad, la convensión es:

- "1" para los grados de libertad de desplazamiento restringido.
- "0" para los grados de libertad donde existe desplazamiento libre.

Cada Columna representa:
Columna 1: número del nudo donde existe el apoyo.

Columna 2: "ux?" información del desplazamiento en la dirección "x" global.
Columna 3: "uy?" información del desplazamiento en la dirección "y" global.

SUPP :=

	1	2	3
1	1	1	1
2	2	0	1
3	4	1	1

2.5 Cargas

Se admite cargas en los nudos y cada columna representa:
Columna 1: número del nudo en que actúa la carga.
Columna 2: carga puntual en la dirección "x" global.
Columna 3: carga puntual en la dirección "y" global.
Se debe ingresar considerando la orientación global del sistema.

NLF :=

	1	2	3
1	2	$2\cdot10^4$	0
2	3	0	$-2.5\cdot10^4$

3. Matriz de rigidez para cada elemento

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

Matriz de rigidez del elemento : $m := 1$

3.1Obteniendo la matriz de rigidez local para el elemento

3.1.1 La longitud del elemento $m = 1$ es $L(m) = 40$

3.1.2 Relación entre el sistema de coordenadas "x" local y el sistema de coordenadas natural(ξ)

$$\xi(x) := \frac{2 \cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{20} - 1$$

3.1.3 Vector de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1 - \xi(x)}{2} & \frac{1 + \xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{40} & \frac{x}{40} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

$$B(x) := \frac{d}{dx} N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

1.2.4 Matriz de propiedades del material

Para este tipo de elemento esta matriz de reduce al módulo de elasticidad del material

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

1.2.5 Matriz de rigidez del elemento es.

$$k_e := \int_{-1}^{1} B(x)^{T} \cdot c(m) \cdot B(x) \cdot A(m) \cdot \frac{L(m)}{2} \, d\xi$$

$$k_e := k_e \text{ float } \rightarrow \begin{pmatrix} 737500.0 & -737500.0 \\ -737500.0 & 737500.0 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^{5} & -7.375 \times 10^{5} \\ -7.375 \times 10^{5} & 7.375 \times 10^{5} \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz de tranformación local - global

3.2.1 la matriz resulta:.

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "x" global.

$$\frac{x_f(m) - x_i(m)}{L(m)} = \frac{(40 - 0)}{40} \qquad \lambda x(m) = 1$$

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "y" global.

$$\frac{y_f(m) - y_i(m)}{L(m)} = \frac{(0 - 0)}{40} \qquad \lambda y(m) = 0$$

Ordenando

$$T(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Matriz de rigidez respecto al sistema de orientación global

$$K_e := T(m)^T \cdot k_e \cdot T(m)$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 737500.0 & -737500.0 \\ -737500.0 & 737500.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^5 & 0 & -7.375 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.375 \times 10^5 & 0 & 7.375 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Matriz de rigidez para cada elemento

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

Matriz de rigidez del elemento : $m := 2$

3.1Obteniendo la matriz de rigidez local para el elemento

3.1.1 La longitud del elemento $m = 2$ es $L(m) = 30$

3.1.2 Relación entre el sistema de coordenadas "x" local y el sistema de coordenadas natural(ξ)

$$\xi(x) := \frac{2 \cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{15} - 1$$

3.1.3 Vector de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1 - \xi(x)}{2} & \frac{1 + \xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{30} & \frac{x}{30} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

$$B(x) := \frac{d}{dx} N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

1.2.4 Matriz de propiedades del material

Para este tipo de elemento esta matriz de reduce al módulo de elasticidad del material

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

1.2.5 Matriz de rigidez del elemento es.

$$k_e := \int_{-1}^{1} B(x)^T \cdot c(m) \cdot B(x) \cdot A(m) \cdot \frac{L(m)}{2} \, d\xi$$

$$k_e := k_e \text{ float } \rightarrow \begin{pmatrix} 983333.33333333333333 & -983333.33333333333333 \\ -983333.33333333333333 & 983333.33333333333333 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 9.833 \times 10^{5} & -9.833 \times 10^{5} \\ -9.833 \times 10^{5} & 9.833 \times 10^{5} \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz de tranformación local - global

3.2.1 la matriz resulta:.

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "x" global.

$$\frac{x_f(m) - x_i(m)}{L(m)} = \frac{(40 - 40)}{30} \qquad \lambda x(m) = 0$$

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "y" global.

$$\frac{y_f(m) - y_i(m)}{L(m)} = \frac{(0 - 30)}{30} \qquad \lambda y(m) = -1$$

Ordenando

$$T(m) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.3 Matriz de rigidez respecto al sistema de orientación global

$$K_e := T(m)^T \cdot k_e \cdot T(m)$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 983333.33333333333333 & -983333.33333333333333 \\ -983333.33333333333333 & 983333.33333333333333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.833 \times 10^5 & 0 & -9.833 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9.833 \times 10^5 & 0 & 9.833 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

3. Matriz de rigidez para cada elemento

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

Matriz de rigidez del elemento : $m := 3$

3.1Obteniendo la matriz de rigidez local para el elemento

3.1.1 La longitud del elemento $m = 3$ es $L(m) = 50$

3.1.2 Relación entre el sistema de coordenadas "x" local y el sistema de coordenadas natural(ξ)

$$\xi(x) := \frac{2 \cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{25} - 1$$

3.1.3 Vector de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1 - \xi(x)}{2} & \frac{1 + \xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{50} & \frac{x}{50} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

$$B(x) := \frac{d}{dx} N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \end{pmatrix}$$

1.2.4 Matriz de propiedades del material

Para este tipo de elemento esta matriz de reduce al módulo de elasticidad del material

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

1.2.5 Matriz de rigidez del elemento es.

$$k_e := \int_{-1}^{1} B(x)^{T} \cdot c(m) \cdot B(x) \cdot A(m) \cdot \frac{L(m)}{2} \, d\xi$$

$$k_e := k_e \text{ float } \rightarrow \begin{pmatrix} 590000.0 & -590000.0 \\ -590000.0 & 590000.0 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 5.9 \times 10^{5} & -5.9 \times 10^{5} \\ -5.9 \times 10^{5} & 5.9 \times 10^{5} \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz de tranformación local - global

3.2.1 la matriz resulta:.

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "x" global.

$$\frac{x_f(m) - x_i(m)}{L(m)} = \frac{(40-0)}{50} \qquad \lambda x(m) = 0.8$$

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "y" global.

$$\frac{y_f(m) - y_i(m)}{L(m)} = \frac{(30-0)}{50} \qquad \lambda y(m) = 0.6$$

Ordenando

$$T(m) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

3.3 Matriz de rigidez respecto al sistema de orientación global

$$K_e := T(m)^T \cdot k_e \cdot T(m)$$

$$K_e = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 590000.0 & -590000.0 \\ -590000.0 & 590000.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 3.776 \times 10^5 & 2.832 \times 10^5 & -3.776 \times 10^5 & -2.832 \times 10^5 \\ 2.832 \times 10^5 & 2.124 \times 10^5 & -2.832 \times 10^5 & -2.124 \times 10^5 \\ -3.776 \times 10^5 & -2.832 \times 10^5 & 3.776 \times 10^5 & 2.832 \times 10^5 \\ -2.832 \times 10^5 & -2.124 \times 10^5 & 2.832 \times 10^5 & 2.124 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

3. Matriz de rigidez para cada elemento

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

Matriz de rigidez del elemento : $m := 4$

3.1Obteniendo la matriz de rigidez local para el elemento

3.1.1 La longitud del elemento $m = 4$ es $L(m) = 40$

3.1.2 Relación entre el sistema de coordenadas "x" local y el sistema de coordenadas natural(ξ)

$$\xi(x) := \frac{2\cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{20} - 1$$

3.1.3 Vector de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1-\xi(x)}{2} & \frac{1+\xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{40} & \frac{x}{40} \end{pmatrix}$$

1.2.3 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

$$B(x) := \frac{d}{dx}N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

1.2.4 Matriz de propiedades del material

Para este tipo de elemento esta matriz de reduce al módulo de elasticidad del material

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

1.2.5 Matriz de rigidez del elemento es.

$$k_e := \int_{-1}^{1} B(x)^{T}\cdot c(m)\cdot B(x)\cdot A(m)\cdot\frac{L(m)}{2}\, d\xi$$

$$k_e := k_e \text{ float } \rightarrow \begin{pmatrix} 737500.0 & -737500.0 \\ -737500.0 & 737500.0 \end{pmatrix}$$

$$k_e = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^{5} & -7.375 \times 10^{5} \\ -7.375 \times 10^{5} & 7.375 \times 10^{5} \end{pmatrix}$$

3.2 Matriz de tranformación local - global

3.2.1 la matriz resulta:.

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "x" global.

$$\frac{x_f(m) - x_i(m)}{L(m)} = \frac{(40 - 0)}{40} \qquad \lambda x(m) = 1$$

Coseno del menor ángulo que forma el elemento con el eje "y" global.

$$\frac{y_f(m) - y_i(m)}{L(m)} = \frac{(30 - 30)}{40} \qquad \lambda y(m) = 0$$

Ordenando

$$T(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Matriz de rigidez respecto al sistema de orientación global

$$K_e := T(m)^T \cdot k_e \cdot T(m)$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 737500.0 & -737500.0 \\ -737500.0 & 737500.0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_e = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^5 & 0 & -7.375 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.375 \times 10^5 & 0 & 7.375 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

Hasta ahora ya se obtuvieron las matrices de rigidez respecto al sistema global para todos los elementos, seguidamente se ensdambla según los grados de libertad, la matriz resulta

$$K = \begin{pmatrix} 1.115\times10^{6} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 & -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 \\ 2.832\times10^{5} & 2.124\times10^{5} & 0 & 0 & -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & 0 \\ -7.375\times10^{5} & 0 & 7.375\times10^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.833\times10^{5} & 0 & -9.833\times10^{5} & 0 & 0 \\ -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 & 1.115\times10^{6} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 \\ -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & -9.833\times10^{5} & 2.832\times10^{5} & 1.196\times10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.375\times10^{5} & 0 & 7.375\times10^{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Vector de fuerzas.

Ensamblando convenientemente según los grados de libertad, el vector resulta

$$F^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\times10^{4} & 0 & 0 & -2.5\times10^{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Desplazamientos de los nudos

5.1 Imponiendo las condiciones de contorno

$$Km = \begin{pmatrix} 1\times10^{307} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 & -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 \\ 2.832\times10^{5} & 1\times10^{307} & 0 & 0 & -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & 0 \\ -7.375\times10^{5} & 0 & 7.375\times10^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\times10^{307} & 0 & -9.833\times10^{5} & 0 & 0 \\ -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 & 1.115\times10^{6} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 \\ -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & -9.833\times10^{5} & 2.832\times10^{5} & 1.196\times10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.375\times10^{5} & 0 & 1\times10^{307} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{307} \end{pmatrix}$$

5.2 Formando la matriz aumentada

$$se = \begin{pmatrix} 1\times10^{307} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 & -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 & 0 \\ 2.832\times10^{5} & 1\times10^{307} & 0 & 0 & -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & 0 & 0 \\ -7.375\times10^{5} & 0 & 7.375\times10^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\times10^{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1\times10^{307} & 0 & -9.833\times10^{5} & 0 & 0 & 0 \\ -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 & 1.115\times10^{6} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 & 0 \\ -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & -9.833\times10^{5} & 2.832\times10^{5} & 1.196\times10^{6} & 0 & 0 & -2.5\times10^{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.375\times10^{5} & 0 & 1\times10^{307} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{307} & 0 \end{pmatrix}$$

5.3 El sistema de ecuaciones en su forma escalonada reducida

$$ser = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.027 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5.65 \times 10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.022 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.4 Los desplazamientos resultan

$$D^T = \begin{pmatrix} 0 \times 10^0 & 0 \times 10^0 & 27.119 \times 10^{-3} & 0 \times 10^0 & 5.65 \times 10^{-3} & -22.246 \times 10^{-3} & 0 \times 10^0 & 0 \times 10^0 \end{pmatrix}$$

Ordenado:

$$Dor = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0.027 & 0 \\ 3 & 5.65 \times 10^{-3} & -0.022 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:(en el sistema de oriwntación global)
Columna 1: número del nudo.
Columna 2: desplazamiento en x
Columna 3: desplazamiento en y

6 Reacciónes en los apoyos.

$$K = \begin{pmatrix} 1.115\times10^{6} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 & -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 \\ 2.832\times10^{5} & 2.124\times10^{5} & 0 & 0 & -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & 0 \\ -7.375\times10^{5} & 0 & 7.375\times10^{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9.833\times10^{5} & 0 & -9.833\times10^{5} & 0 & 0 \\ -3.776\times10^{5} & -2.832\times10^{5} & 0 & 0 & 1.115\times10^{6} & 2.832\times10^{5} & -7.375\times10^{5} & 0 \\ -2.832\times10^{5} & -2.124\times10^{5} & 0 & -9.833\times10^{5} & 2.832\times10^{5} & 1.196\times10^{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.375\times10^{5} & 0 & 7.375\times10^{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ x } D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.027 \\ 0 \\ 5.65\times10^{-3} \\ -0.022 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\times10^{4} \\ 0 \\ 0 \\ -2.5\times10^{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

efectuando la multiplicación:

$$R^{T} = \begin{pmatrix} -1.583\times10^{4} & 3.125\times10^{3} & 0 & 2.187\times10^{4} & 0 & 0 & -4.167\times10^{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Ordenando:

$$Ror = \begin{pmatrix} 1 & -1.583\times10^{4} & 3.125\times10^{3} \\ 2 & 0 & 2.187\times10^{4} \\ 4 & -4.167\times10^{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Donde:(en el sistema de orientación global)
Columna 1: número de nudo
Columna 2: reacción en x
Columna 3: reacción en y

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

6 Fuerzas en los extremos de los elementos

Para el elemento: $m := 1$

6.1 la matriz de propiedades del material que compone al elemento, para armaduras, se reduce a su módulo de elasticidad del material.

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

6.2 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

relación del sistema local con la coordenad anatural

$$\xi(x) := \frac{2\cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{20} - 1$$

matriz de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1-\xi(x)}{2} & \frac{1+\xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{40} & \frac{x}{40} \end{pmatrix}$$

la matriz deformación unitaria - desplazamiento, resulta

$$B(x) := \frac{d}{dx}N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

6.3 Matrix de trasformación local - global

$$T(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4 Los desplazamientos de los nudos, en el sistema de orientación global, para el elemento es

$$De(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.027 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.5 La fuerza axial en los extremos de la barra está dado por.

$$\sigma := c(m)\cdot B(x)\cdot T(m)\cdot De(m)$$

efectuando la multiplicación.

$\sigma = 2 \times 10^{4}$ resulta fuerza axial constante

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

6 Fuerzas en los extremos de los elementos

Para el elemento: $m := 2$

6.1 la matriz de propiedades del material que compone al elemento, para armaduras, se reduce a su módulo de elasticidad del material.

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

6.2 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

relación del sistema local con la coordenad anatural

$$\xi(x) := \frac{2\cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{15} - 1$$

matriz de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1-\xi(x)}{2} & \frac{1+\xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{30} & \frac{x}{30} \end{pmatrix}$$

la matriz deformación unitaria - desplazamiento, resulta

$$B(x) := \frac{d}{dx}N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{30} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

6.3 Matrix de trasformación local - global

$$T(m) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6.4 Los desplazamientos de los nudos, en el sistema de orientación global, para el elemento es

$$De(m) = \begin{pmatrix} 5.65 \times 10^{-3} \\ -0.022 \\ 0.027 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.5 La fuerza axial en los extremos de la barra está dado por.

$$\sigma := c(m)\cdot B(x)\cdot T(m)\cdot De(m)$$

efectuando la multiplicación.

$\sigma = -2.187 \times 10^{4}$ resulta fuerza axial constante

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

6 Fuerzas en los extremos de los elementos

Para el elemento: $m := 3$

6.1 la matriz de propiedades del material que compone al elemento, para armaduras, se reduce a su módulo de elasticidad del material.

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

6.2 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

relación del sistema local con la coordenad anatural

$$\xi(x) := \frac{2 \cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{25} - 1$$

matriz de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1-\xi(x)}{2} & \frac{1+\xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1-\frac{x}{50} & \frac{x}{50} \end{pmatrix}$$

la matriz deformación unitaria - desplazamiento, resulta

$$B(x) := \frac{d}{dx}N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \end{pmatrix}$$

6.3 Matrix de trasformación local - global

$$T(m) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

6.4 Los desplazamientos de los nudos, en el sistema de orientación global, para el elemento es

$$De(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.65 \times 10^{-3} \\ -0.022 \end{pmatrix}$$

6.5 La fuerza axial en los extremos de la barra está dado por.

$$\sigma := c(m) \cdot B(x) \cdot T(m) \cdot De(m)$$

efectuando la multiplicación.

$\sigma = -5.208 \times 10^{3}$ resulta fuerza axial constante

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

6 Fuerzas en los extremos de los elementos

Para el elemento: $m := 4$

6.1 la matriz de propiedades del material que compone al elemento, para armaduras, se reduce a su módulo de elasticidad del material.

$$c(m) := E(m) \qquad c(m) = 2.95 \times 10^{7}$$

6.2 Matriz de deformación unitaria-desplazamiento del elemento

relación del sistema local con la coordenad anatural

$$\xi(x) := \frac{2 \cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{20} - 1$$

matriz de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1-\xi(x)}{2} & \frac{1+\xi(x)}{2} \end{pmatrix} \qquad N(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{40} & \frac{x}{40} \end{pmatrix}$$

la matriz deformación unitaria - desplazamiento, resulta

$$B(x) := \frac{d}{dx} N(x) \qquad B(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

6.3 Matrix de trasformación local - global

$$T(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.4 Los desplazamientos de los nudos, en el sistema de orientación global, para el elemento es

$$De(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.65 \times 10^{-3} \\ -0.022 \end{pmatrix}$$

6.5 La fuerza axial en los extremos de la barra está dado por.

$$\sigma := c(m) \cdot B(x) \cdot T(m) \cdot De(m)$$

efectuando la multiplicación.

$\sigma = 4.167 \times 10^{3}$ resulta fuerza axial constante

7 Variación de desplazamientos soble el elemento

Reference:D:\FEM\Cerchas2D\FUNCIONES.xmcd

7.1 Para el elemento #1: $m := 1$

7.1.1 Transformando los desplazamientos de los extremos del elemento al sistema de orientación local.

Vector de desplazamiento de los extremos
del elemento en el sistema de orientación global

$$De(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.027 \\ 0 \end{pmatrix}$$

matriz de trasformación local - global

$$T(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Desplazameito en el sistema local

$$d_e := T(m) \cdot De(m)$$

$$d_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.027 \end{pmatrix}$$

7.1.2 Relación entre el sistema de coordenada local y el sistema de coordenada natural

$$\xi(x) := \frac{2 \cdot x}{L(m)} - 1 \qquad \xi(x) = \frac{x}{20} - 1$$

7.1.3 Vector de funciones de forma

$$N(x) := \begin{pmatrix} \frac{1 - \xi(x)}{2} & \frac{1 + \xi(x)}{2} \end{pmatrix}$$

7.1.4 Variación de desplazmaiento en el elmento.

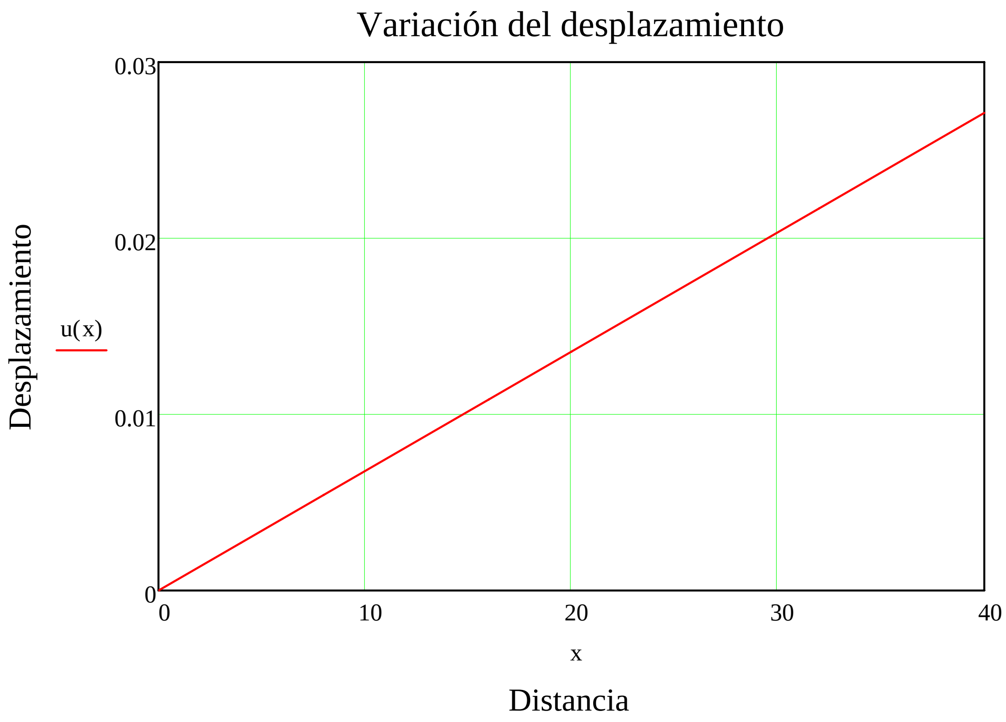
$$u(x) := N(x) \cdot d_e$$

7.1.5 Graficando

$$a := \frac{L(m)}{10} \qquad a = 4 \qquad x := 0, a .. L(m)$$

Evaluando las funciones para 11 puntos

$x =$	$\xi(x) =$	$u(x) =$
0	-1	0
4	-0.8	$2.712 \cdot 10^{-3}$
8	-0.6	$5.424 \cdot 10^{-3}$
12	-0.4	$8.136 \cdot 10^{-3}$
16	-0.2	0.011
20	0	0.014
24	0.2	0.016
28	0.4	0.019
32	0.6	0.022
36	0.8	0.024
40	1	0.027



... de igual manera para cada elemento.

Visite: http://www.cgedmundo.googlepages.com