

Ejemplo 4.2b (Página 110)

Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería

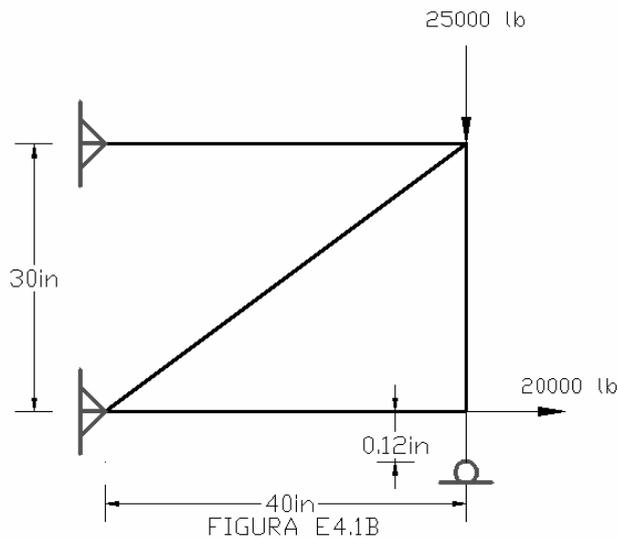
Segunda Edición

TITUPATHI R. CHANDRUPATLA – ASHOK D. BELEGUNDU

PRENTICE HALL

Aquí veremos la armadura de cuatro barras del ejemplo 4.1 pero con carga diferente. Considere $E=29.5E6$ psi. y $Ae=1$ in²

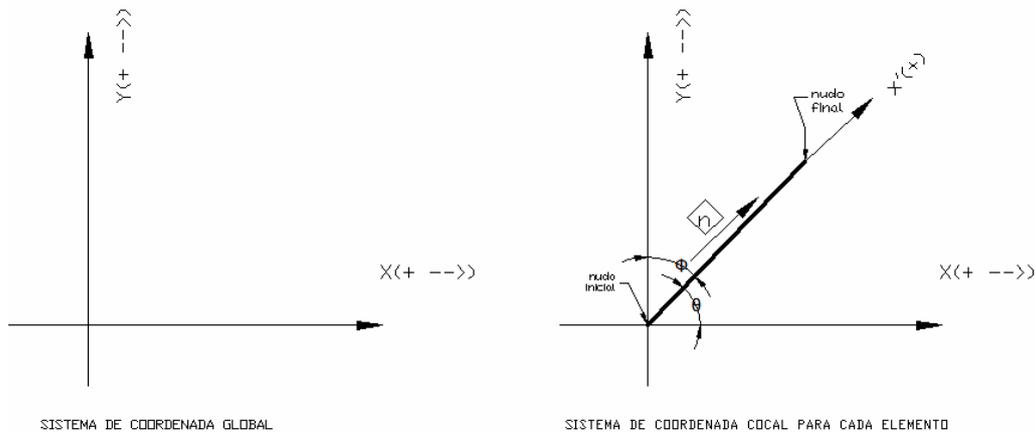
B- aquí se considerará un efecto de asentamiento del soporte. El nudo 2 se asienta 0.12in verticalmente y además se aplican dos cargas puntuales sobre la estructura (Fig. E4.2b).



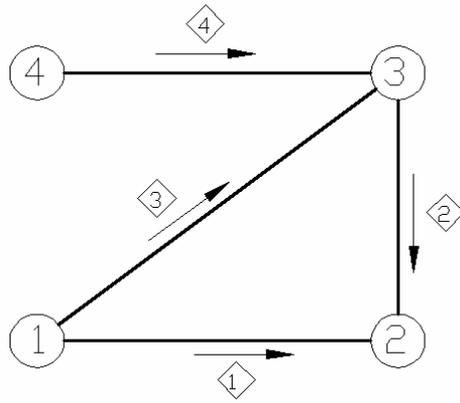
Solución:

1) Convenciones.

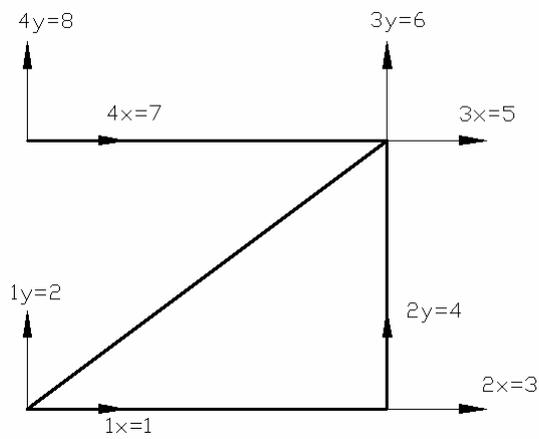
Inicialmente se opta un sistema de coordenada cartesiana ortogonal y el sistema de orientación local para cada elemento, definido por su nudo inicial y final como se muestra.



Luego se divide la estructura en una serie de elementos finitos considerando sus puntos extremos como nudos, se enumera nudos y barras. Cada miembro de la estructura debe estar completamente definido por su nudo inicial y final dentro del sistema.



Según la numeración de los nudos, los grados de libertad son.



Tomando estas convenciones, se ordena los argumentos.



2. Argumentos

☑ MEF/ARMADURAS/DATOS

2.1 Nudos

Cada fila representa un punto y las columnas son:

Columna 1: coordenada "x" global del nudo

Columna 2: coordenada "y" global del nudo

NODE :=

	1	2
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

2.2 Propiedades de los elementos

las propiedades de la sección transversal de los elementos. cada fila representa una propiedad distinta y las columnas son:

Columna 1: Área de la sección transversal del elemento

Columna 2: Módulo de elasticidad del material

PROP :=

	1	2
1	1	$2.95 \cdot 10^7$

2.3 Elementos

Cada fila representa una barra, contiene la información de la conectividad del elemento en el sistema cada columna representa:

Columna 1: nudo inicial del elemento

Columna 2: nudo final del elemento

Columna 3: número de propiedad del elemento

MEMB :=

	1	2	3
1	1	2	1
2	3	2	1
3	1	3	1
4	4	3	1

2.4 Restricciones/Apoyos

Cada fila representa un apoyo de la estructura, las columnas informan el comportamiento para cada grado de libertad, la convención es:

- "1" para los grados de libertad de desplazamiento restringido.
- "0" para los grados de libertad donde exista desplazamiento libre.

Cada columna representa:



Columna 1: número del nudo donde existe el apoyo

Columna 2: "ux?" información del desplazamiento en la dirección "x" global

Columna 3: "uy?" información del desplazamiento en la dirección "y" global

SUPP :=

	1	2	3
1	1	1	1
2	2	0	1
3	4	1	1

2.5 cargas

Se admite cargas en los nudos y cada columna representa:

Columna 1: número del nudo en que actúa la carga

Columna 2: carga en la dirección "x" global

Columna 3: carga en la dirección "y" global

se debe ingresar considerando la orientación global del sistema

NLF :=

	1	2	3
1	2	$2 \cdot 10^4$	0
2	3	0	$-2.5 \cdot 10^4$

2.6 Asentamiento en nudos

Donde:

Columna 1: número del nudo

Columna 2: asentamiento en la dirección "x" global

Columna 3: asentamiento en la dirección "y" global

AEN :=

	1	2	3
1	2	0	-0.12



3. Formando Vector de Cargas

▢ MEF/ARMADURAS/DATOS

▣ MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

Ordenado las cargas según los grados de libertad.

```
F :=  $\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) \leftarrow 0 \\ F \leftarrow \text{matrix}(2 \cdot \text{rows}(\text{NODE}), 1, f) \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(\text{NLF}) \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} n \leftarrow \text{NLF}_{i,1} \\ f_x \leftarrow \text{NLF}_{i,2} \\ f_y \leftarrow \text{NLF}_{i,3} \\ F_{2 \cdot n - 1} \leftarrow f_x \\ F_{2n} \leftarrow f_y \end{array} \right. \\ F \end{array} \right.$ 
```

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \\ -2.5 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▣ MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS



4. Matriz de Rigidez de Elementos

► MEF/ARMADURAS/DATOS

► MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▼ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

Elm := 1

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda_{xe} \\ \lambda_{ye} \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda_{xe} \leftarrow \frac{xf - xi}{Le} \\ \lambda_{ye} \leftarrow \frac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \ \lambda_{xe} \ \lambda_{ye} \ Ae \ Ee)^T \end{array}$$

Con el programa se obtiene para el elemento Elm = 1

- Longitud del elemento

$$Le = 40$$

- Cosenos directores

$$\lambda_{xe} = 1$$

$$\lambda_{ye} = 0$$

- Propiedades

$$Ae = 1$$

$$Ee = 2.95 \times 10^7$$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{40} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^5 & -7.375 \times 10^5 \\ -7.375 \times 10^5 & 7.375 \times 10^5 \end{pmatrix}$$



4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda_{xe} & \lambda_{ye} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xe} & \lambda_{ye} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^T \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^6}{40}$$



4. Matriz de Rigidez de Elementos

► MEF/ARMADURAS/DATOS

► MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▼ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

Elm := 2

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda_{xe} \\ \lambda_{ye} \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda_{xe} \leftarrow \frac{xf - xi}{Le} \\ \lambda_{ye} \leftarrow \frac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \ \lambda_{xe} \ \lambda_{ye} \ Ae \ Ee)^T \end{array}$$

Con el programa se obtiene para el elemento Elm = 2

- Longitud del elemento

$$Le = 30$$

- Cosenos directores

$$\lambda_{xe} = 0$$

$$\lambda_{ye} = -1$$

- Propiedades

$$Ae = 1$$

$$Ee = 2.95 \times 10^7$$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{30} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 9.833 \times 10^5 & -9.833 \times 10^5 \\ -9.833 \times 10^5 & 9.833 \times 10^5 \end{pmatrix}$$



4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda_{xe} & \lambda_{ye} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xe} & \lambda_{ye} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^T \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^6}{30}$$



4. Matriz de Rigidez de Elementos

► MEF/ARMADURAS/DATOS

► MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▼ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

Elm := 3

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda_{xe} \\ \lambda_{ye} \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda_{xe} \leftarrow \frac{xf - xi}{Le} \\ \lambda_{ye} \leftarrow \frac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \ \lambda_{xe} \ \lambda_{ye} \ Ae \ Ee)^T \end{array}$$

Con el programa se obtiene para el elemento Elm = 3

- Longitud del elemento

$$Le = 50$$

- Cosenos directores

$$\lambda_{xe} = 0.8$$

$$\lambda_{ye} = 0.6$$

- Propiedades

$$Ae = 1$$

$$Ee = 2.95 \times 10^7$$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{50} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 5.9 \times 10^5 & -5.9 \times 10^5 \\ -5.9 \times 10^5 & 5.9 \times 10^5 \end{pmatrix}$$



4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda_{xe} & \lambda_{ye} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xe} & \lambda_{ye} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^T \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^6}{50}$$



4. Matriz de Rigidez de Elementos

► MEF/ARMADURAS/DATOS

► MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▼ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

Elm := 4

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda_{xe} \\ \lambda_{ye} \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda_{xe} \leftarrow \frac{xf - xi}{Le} \\ \lambda_{ye} \leftarrow \frac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \ \lambda_{xe} \ \lambda_{ye} \ Ae \ Ee)^T \end{array}$$

Con el programa se obtiene para el elemento Elm = 4

- Longitud del elemento

$$Le = 40$$

- Cosenos directores

$$\lambda_{xe} = 1$$

$$\lambda_{ye} = 0$$

- Propiedades

$$Ae = 1$$

$$Ee = 2.95 \times 10^7$$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{40} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^5 & -7.375 \times 10^5 \\ -7.375 \times 10^5 & 7.375 \times 10^5 \end{pmatrix}$$



4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda_{xe} & \lambda_{ye} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xe} & \lambda_{ye} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^T \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^6}{40}$$



4-1. Matriz de Rigidez Ensamblado

▶ MEF/ARMADURAS/DATOS _____

▶ MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS _____

▶ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E _____

▼ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO _____

Programa que ensambla la matriz de rigidez de la estructura "K"

```
K := | N ← 2 rows(NODE)
      | f(x,y) ← 0
      | K ← matrix(N,N,f)
      | for i ∈ 1 .. rows(MEMB)
      |   | ni ← MEMBi,1
      |   | nf ← MEMBi,2
      |   | prop ← MEMBi,3
      |   | xi ← NODEni,1
      |   | yi ← NODEni,2
      |   | xf ← NODEnf,1
      |   | yf ← NODEnf,2
      |   | Le ←  $\sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2}$ 
      |   |  $\lambda_{xe} \leftarrow \frac{xf - xi}{Le}$ 
      |   |  $\lambda_{ye} \leftarrow \frac{yf - yi}{Le}$ 
      |   | Ae ← PROPprop,1
      |   | Ee ← PROPprop,2
      |   |  $k \leftarrow \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 
      |   |  $L \leftarrow \begin{pmatrix} \lambda_{xe} & \lambda_{ye} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{xe} & \lambda_{ye} \end{pmatrix}$ 
      |   | Ke ← LT · k · L
      |   | "Columna 2*ni-1"
      |   |  $K_{2 \cdot ni - 1, 2 \cdot ni - 1} \leftarrow K_{2 \cdot ni - 1, 2 \cdot ni - 1} + \frac{Ke_{1,1}}{2}$ 
      |   |  $K_{2ni, 2ni-1} \leftarrow K_{2ni, 2ni-1} + Ke_{2,1}$ 
      |   |  $K_{2 \cdot nf - 1, 2 \cdot ni - 1} \leftarrow K_{2 \cdot nf - 1, 2 \cdot ni - 1} + Ke_{3,1}$ 
      |   |  $K_{2nf, 2ni-1} \leftarrow K_{2nf, 2ni-1} + Ke_{4,1}$ 
      |   | "Columna 2*ni"
```



$$\begin{aligned}
 K_{2ni, 2 \cdot ni} &\leftarrow K_{2ni, 2 \cdot ni} + \frac{K_{e_{2,2}}}{2} \\
 K_{2nf-1, 2ni} &\leftarrow K_{2nf-1, 2ni} + K_{e_{3,2}} \\
 K_{2nf, 2ni} &\leftarrow K_{2nf, 2ni} + K_{e_{4,2}} \\
 &\text{"Columna } 2 \cdot nf - 1\text{"} \\
 K_{2nf-1, 2nf-1} &\leftarrow K_{2nf-1, 2nf-1} + \frac{K_{e_{3,3}}}{2} \\
 K_{2nf, 2nf-1} &\leftarrow K_{2nf, 2nf-1} + K_{e_{4,3}} \\
 &\text{"Columna } 2 \cdot nf\text{"} \\
 K_{2nf, 2nf} &\leftarrow K_{2nf, 2nf} + \frac{K_{e_{4,4}}}{2} \\
 K &\leftarrow K^T + K \\
 K
 \end{aligned}$$

$$K = \begin{pmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \cdot 10^6}{600}$$



5. Estableciendo las Condiciones de Frontera

- MEF/ARMADURAS/DATOS _____
- MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO _____
- MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA _____

Modificando la matriz de rigidez "K" según las restricciones en los apoyos.

$$\begin{array}{l}
 \text{Km} := \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Km} \leftarrow \text{K} \\
 \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(\text{SUPP}) \\
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 n \leftarrow \text{SUPP}_{i,1} \\
 u_x \leftarrow \text{SUPP}_{i,2} \\
 u_y \leftarrow \text{SUPP}_{i,3} \\
 \text{Km}_{2n-1,2n-1} \leftarrow \infty \text{ if } u_x = 1 \\
 \text{Km}_{2n,2n} \leftarrow \infty \text{ if } u_y = 1
 \end{array} \right. \\
 \text{Km}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\text{Km} = \begin{pmatrix}
 2.034 \times 10^{302} & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\
 5.76 & 2.034 \times 10^{302} & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\
 -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 2.034 \times 10^{302} & 0 & -20 & 0 & 0 \\
 -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\
 -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 2.034 \times 10^{302} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.034 \times 10^{302}
 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \cdot 10^6}{600}$$

Modificando el vector de fuerzas según los desplazamientos impuestos en los nudos.

$$\begin{array}{l}
 \text{Fm} := \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Fm} \leftarrow \text{F} \\
 \text{for } i \in \text{rows}(\text{AEN}) \\
 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 n \leftarrow \text{AEN}_{i,1} \\
 \Delta x \leftarrow \text{AEN}_{i,2} \\
 \Delta y \leftarrow \text{AEN}_{i,3} \\
 \text{Fm}_{2n-1} \leftarrow \text{Fm}_{2n-1} + \Delta x \cdot (\infty) \\
 \text{Fm}_{2n} \leftarrow \text{Fm}_{2n} + \Delta y \cdot (\infty)
 \end{array} \right. \\
 \text{Fm}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\text{Fm} = \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 2 \times 10^4 \\
 -1.2 \times 10^{306} \\
 0 \\
 -2.5 \times 10^4 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}$$

- MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA _____



5-1 Obteniendo Desplazamiento en Nudos

- MEF/ARMADURAS/DATOS _____
- MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO _____
- MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA _____
- MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS _____

Formando la matriz aumentada.

$$\text{augment}(\mathbf{K}_m, \mathbf{F}_m) = \begin{pmatrix} 1 \times 10^{302} & 2.832 & -7.375 & 0 & -3.776 & -2.832 & 0 & 0 & 0 \\ 2.832 & 1 \times 10^{302} & 0 & 0 & -2.832 & -2.124 & 0 & 0 & 0 \\ -7.375 & 0 & 7.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{302} & 0 & -9.833 & 0 & 0 & -1.2 \times 10^{301} \\ -3.776 & -2.832 & 0 & 0 & 11.151 & 2.832 & -7.375 & 0 & 0 \\ -2.832 & -2.124 & 0 & -9.833 & 2.832 & 11.957 & 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.375 & 0 & 1 \times 10^{302} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{302} & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^5$$

el sistema de ecuaciones en su forma escalonada reducida

$$\text{rref}(\text{augment}(\mathbf{K}_m, \mathbf{F}_m)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.027 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.032 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.127 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

los desplazamiento en los nudos son(según los grados de libertad):

$$\mathbf{Q} := \text{rref}(\text{augment}(\mathbf{K}_m, \mathbf{F}_m))^{\langle \text{rows}(\mathbf{K}_m)+1 \rangle}$$

$$\mathbf{Q}^T = (0 \ 0 \ 0.027119 \ -0.12 \ 0.032316 \ -0.127246 \ 0 \ 0)$$

- MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS _____



6 Reacciones en los Apoyos

- MEF/ARMADURAS/DATOS _____
- MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO _____
- MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA _____
- MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS _____
- MEF/ARMADURAS/REACCIONES EN APOYOS _____

Sustituyendo datos en la ecuación fundamental del elemento finito

$$R := K \cdot Q - F$$

$$R^T = \left(3.833 \times 10^3 \quad 1.788 \times 10^4 \quad 0 \quad 7.125 \times 10^3 \quad 0 \quad 1.455 \times 10^{-11} \quad -2.383 \times 10^4 \quad 0 \right)$$

Ordenando las reacciones:

Columna 1: número de nudo

Columna 2: Reacción en la dirección "x" global

Columna 3: Reacción en la dirección "y" global

```

Ro :=
  f(x,y) ← 0
  Ro ← matrix(rows(SUPP),3,f)
  for i ∈ 1..rows(SUPP)
    n ← SUPPi,1
    ux ← SUPPi,2
    uy ← SUPPi,3
    Roi,2 ← R2n-1 if ux = 1
    Roi,3 ← R2n if uy = 1
    Roi,1 ← n
  Ro

```

Reacciones en los nudos son:

$$Ro = \begin{pmatrix} 1 & 3833.333333 & 17875 \\ 2 & 0 & 7125 \\ 4 & -23833.333333 & 0 \end{pmatrix}$$

- MEF/ARMADURAS/REACCIONES EN APOYOS _____



7 Esfuerzo Axial en los Elementos

- MEF/ARMADURAS/DATOS _____
- MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E _____
- MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO _____
- MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA _____
- MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS _____
- MEF/ARMADURAS/REACCIONES EN APOYOS _____
- MEF/ARMADURAS/ESFUERZO AXIAL _____

Programa que obtiene los esfuerzos axiales en todas las barras

```

σ := for i ∈ 1 .. rows(MEMB)
    ni ← MEMBi,1
    nf ← MEMBi,2
    prop ← MEMBi,3
    xi ← NODEni,1
    yi ← NODEni,2
    xf ← NODEnf,1
    yf ← NODEnf,2
    Le ← √((xf - xi)2 + (yf - yi)2)
    λxe ← (xf - xi) / Le
    λye ← (yf - yi) / Le
    Ee ← PROPprop,2
    q ←  $\begin{pmatrix} Q_{2ni-1} \\ Q_{2ni} \\ Q_{2nf-1} \\ Q_{2nf} \end{pmatrix}$ 
    σi ←  $\frac{Ee}{Le} \cdot (-\lambda_{xe} \ -\lambda_{ye} \ \lambda_{xe} \ \lambda_{ye}) \cdot q$ 
σ
```

$$\sigma = \begin{pmatrix} 20000 \\ -7125 \\ -29791.67 \\ 23833.33 \end{pmatrix}$$

- MEF/ARMADURAS/ESFUERZO AXIAL _____

8- Comparando los resultados con el programa Sap2000 11.0.4.

8.1 Desplazamientos en los nudos.

Resultado con sap2000 11.0.4

	Joint Text	OutputCase Text	CaseType Text	U1 in	U2 in	U3 in	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
▶	1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	0.027119	0	-0.12	0	0	0
	3	DEAD	LinStatic	0.032316	0	-0.127246	0	0	0
	4	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

Resultado con mathCAD.

$$Q^T = (0 \ 0 \ 0.027119 \ -0.12 \ 0.032316 \ -0.127246 \ 0 \ 0)$$

8.2 reacciones en los apoyos.

Resultado con sap2000 11.0.4

	Joint Text	OutputCase Text	CaseType Text	F1 Lb	F2 Lb	F3 Lb	M1 Lb-in	M2 Lb-in	M3 Lb-in
▶	1	DEAD	LinStatic	3833.33	0	17875	0	0	0
	2	DEAD	LinStatic	0	0	7125	0	0	0
	4	DEAD	LinStatic	-23833.33	0	0	0	0	0

Resultado con mathCAD

$$R_o = \begin{pmatrix} 1 & 3833.333333 & 17875 \\ 2 & 0 & 7125 \\ 4 & -23833.333333 & 0 \end{pmatrix}$$

8.3 Esfuerzo axial en los elementos.

Resultado con sap2000 11.0.4

	Frame Text	Station in	OutputCase Text	CaseType Text	P Lb	V2 Lb	V3 Lb	T Lb-in	M2 Lb-in
▶	1	0	DEAD	LinStatic	20000	0	0	0	0
	1	20	DEAD	LinStatic	20000	0	0	0	0
	1	40	DEAD	LinStatic	20000	0	0	0	0
	2	0	DEAD	LinStatic	-7125	0	0	0	0
	2	15	DEAD	LinStatic	-7125	0	0	0	0
	2	30	DEAD	LinStatic	-7125	0	0	0	0
	3	0	DEAD	LinStatic	-29791.67	0	0	0	0
	3	25	DEAD	LinStatic	-29791.67	0	0	0	0
	3	50	DEAD	LinStatic	-29791.67	0	0	0	0
	4	0	DEAD	LinStatic	23833.33	0	0	0	0
	4	20	DEAD	LinStatic	23833.33	0	0	0	0
	4	40	DEAD	LinStatic	23833.33	0	0	0	0

Resultado con mathCAD.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 20000 \\ -7125 \\ -29791.67 \\ 23833.33 \end{pmatrix}$$

Conclusión:

Se Observa que los cálculos obtenidos son idénticos a los de sap2000 11.0.4