Ejemplo 4.2 (Página 110)

Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería
Segunda Edición
TITUPATHI R. CHANDRUPATLA – ASHOK D. BELEGUNDU
PRENTICE HALL

Aquí veremos la armadura de cuatro barras del ejemplo 4.1 pero con carga diferente. Considere E=29.5E6psi y α=1/150 000 por ºF.

A- Se tiene un incremento de temperatura de 50ºF sólo en las barras 2 y 3(fig. E4.2a). no hay más cargas sobre la estructura. Determine los desplazamientos nodales y los esfuerzos en los elementos como resultado de este incremento de temperatura.

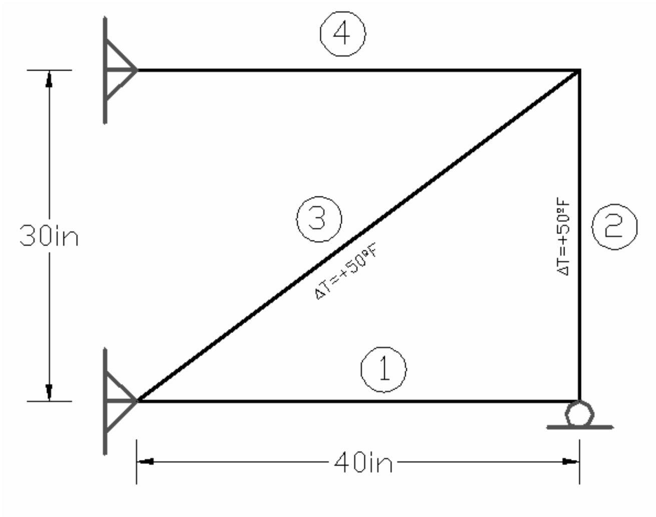
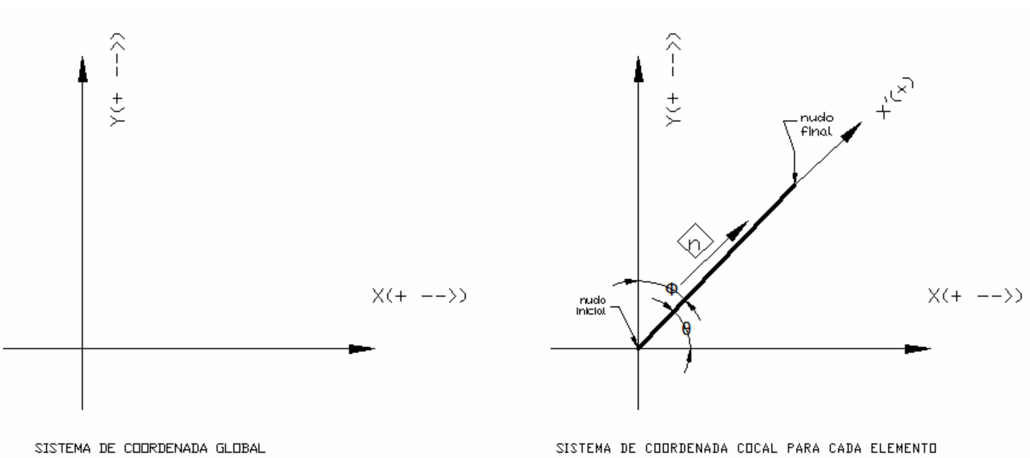


FIGURA E4.2A

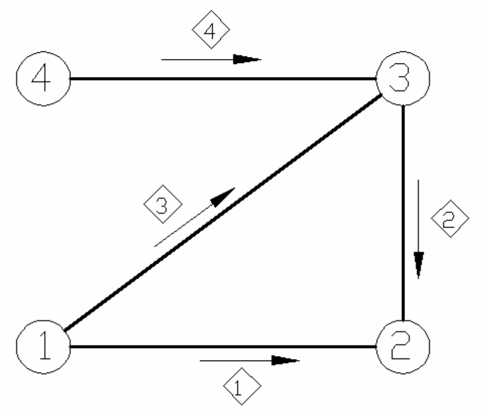
Solución:

1) Convenciones.

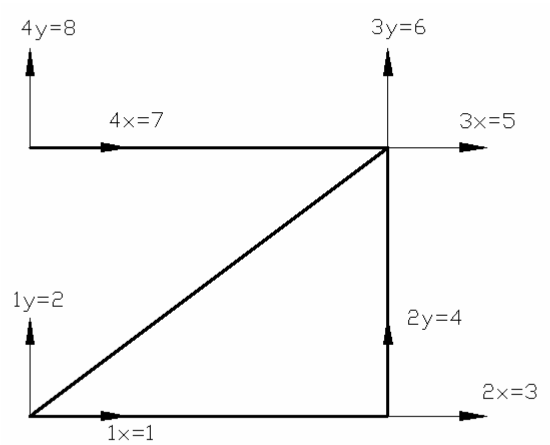
Inicialmente se opta un sistema de coordenada cartesiana ortogonal y el sistema de orientación local para cada elemento, definido por su nudo inicial y final como se muestra.



Luego se divide la estructura en una serie de elementos finitos considerando sus puntos extremos como nudos, se enumera nudos y barras. Cada miembro de la estructura debe estar completamente definido por su nudo inicial y final dentro del sistema.



Según la numeración de los nudos, los grados de libertad son.



Tomando estas convenciones, se ordena los argumentos.

2. Argumentos

MEF/ARMADURAS/DATOS

2.1 Nudos

Cada fila representa un punto y las columnas son:
Columna 1: coordenada "x" global del nudo
Columna 2: corrdenada "y" global del nudo

NODE :=

	1	2
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

2.2 Propiedades de los elementos

las propiedqades de la sección trasversal de los elementos. cada fila representa una propiedad distinta y las columnas son:
Columna 1: Área de la sección trasversal del elemento
Columna 2: Módulo de elasticidad del material

PROP :=

	1	2
1	1	$2.95 \cdot 10^{7}$

2.3 Elementos

Cada fila representa una barra, contiene la información de la conectividad del elemento en el sisten
cada columna representa:
Columna 1: nudo inicial del elemento
Columna 2: nudo final del elemento
Columna 3: número de propiedad del elemento

MEMB :=

	1	2	3
1	1	2	1
2	3	2	1
3	1	3	1
4	4	3	1

2.4 Restricciones/Apoyos

Cara fila representa un apoyo de la estructura, las columnas informan el comportamiento para cada grado de libertad, la convensión es:

- "1" para los grados de libertad de desplazamiento restringido.
- "0" para los grados de libertad donde exista desplazamiento libre.

Cada columna representa:

Columna 1: número del nudo donde existe el apoyo
Columna 2: "ux?" información del desplazamiento en la dirección "x" global
Columna 3: "uy?" información del desplazamiento en la dirección "y" global

SUPP :=

	1	2	3
1	1	1	1
2	2	0	1
3	4	1	1

2.5 Cargas por temperatura

Se debe especificar el coeficiente de dilatación térmica(α) y la variación de temperatura:
Columna 1: número del elemento
Columna 2: coeficiente de expansión térmica
Columna 3: variación de temperatura

ETF :=

	1	2	3
1	2	$6.667\cdot10^{-6}$	50
2	3	$6.667\cdot10^{-6}$	50

MEF/ARMADURAS/DATOS

3. Formando Vector de Cargas

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

Ordenando las cargas por la variación de temperatura, según los grados de libertad.

$$
F := \left|
\begin{array}{l}
f(x,y) \leftarrow 0 \\
F \leftarrow \text{matrix}(2\cdot\text{rows}(NODE),1,f) \\
\text{for } i \in 1..\text{rows}(ETF) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
Elm \leftarrow ETF_{i,1} \\
ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\
nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\
prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\
xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\
yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\
xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\
yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\
Le \leftarrow \sqrt{(xf-xi)^2+(yf-yi)^2} \\
\lambda xe \leftarrow \dfrac{xf-xi}{Le} \\
\lambda ye \leftarrow \dfrac{yf-yi}{Le} \\
Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\
Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\
\varepsilon_o \leftarrow ETF_{i,2}\cdot ETF_{i,3} \\
\theta e \leftarrow Ee\cdot Ae\cdot\varepsilon_o\cdot\begin{pmatrix}-\lambda xe\\ -\lambda ye\\ \lambda xe\\ \lambda ye\end{pmatrix} \\
F_{2ni-1} \leftarrow \theta e_1 + F_{2ni-1} \\
F_{2ni} \leftarrow \theta e_2 + F_{2ni} \\
F_{2nf-1} \leftarrow \theta e_3 + F_{2nf-1} \\
F_{2nf} \leftarrow \theta e_4 + F_{2nf}
\end{array}\right. \\
F
\end{array}\right.
\qquad
F = \begin{pmatrix}-7866.7\\ -5900\\ 0\\ -9833.3\\ 7866.7\\ 15733.3\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
$$

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

4. Matriz de Rigidez de Elementos

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

$$Elm := 1$$

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda xe \\ \lambda ye \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda xe \leftarrow \dfrac{xf - xi}{Le} \\ \lambda ye \leftarrow \dfrac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \;\; \lambda xe \;\; \lambda ye \;\; Ae \;\; Ee)^T \end{array} \right.$$

Con el programa se obtiene para el elemento

$Elm = 1$

- Longitud del elemento

  $Le = 40$

- Cosenos directores

  $\lambda xe = 1$

  $\lambda ye = 0$

- Propiedades

  $Ae = 1$

  $Ee = 2.95 \times 10^7$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^5 & -7.375 \times 10^5 \\ -7.375 \times 10^5 & 7.375 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda xe & \lambda ye & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda xe & \lambda ye \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^T \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^6}{40}$$

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4. Matriz de Rigidez de Elementos

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

$Elm := 2$

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda xe \\ \lambda ye \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda xe \leftarrow \dfrac{xf - xi}{Le} \\ \lambda ye \leftarrow \dfrac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \quad \lambda xe \quad \lambda ye \quad Ae \quad Ee)^T \end{array} \right.$$

Con el programa se obtiene para el elemento

$Elm = 2$

- Longitud del elemento

  $Le = 30$

- Cosenos directores

  $\lambda xe = 0$

  $\lambda ye = -1$

- Propiedades

  $Ae = 1$

  $Ee = 2.95 \times 10^7$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 9.833 \times 10^5 & -9.833 \times 10^5 \\ -9.833 \times 10^5 & 9.833 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda xe & \lambda ye & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda xe & \lambda ye \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^{T} \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{T} \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^{6}}{30}$$

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4. Matriz de Rigidez de Elementos

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

$$Elm := 3$$

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda xe \\ \lambda ye \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda xe \leftarrow \dfrac{xf - xi}{Le} \\ \lambda ye \leftarrow \dfrac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \;\; \lambda xe \;\; \lambda ye \;\; Ae \;\; Ee)^T \end{array} \right.$$

Con el programa se obtiene para el elemento

$Elm = 3$

- Longitud del elemento

  $Le = 50$

- Cosenos directores

  $\lambda xe = 0.8$

  $\lambda ye = 0.6$

- Propiedades

  $Ae = 1$

  $Ee = 2.95 \times 10^7$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 5.9 \times 10^5 & -5.9 \times 10^5 \\ -5.9 \times 10^5 & 5.9 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda xe & \lambda ye & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda xe & \lambda ye \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^T \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ 0.48 & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ -0.64 & -0.48 & 0.64 & 0.48 \\ -0.48 & -0.36 & 0.48 & 0.36 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^6}{50}$$

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4. Matriz de Rigidez de Elementos

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4.1 Matriz de rigidez para el elemento

$$Elm := 4$$

4.1.1 la longitud del elemento y los cosenos directores son

$$\begin{pmatrix} Le \\ \lambda xe \\ \lambda ye \\ Ae \\ Ee \end{pmatrix} := \left| \begin{array}{l} ni \leftarrow MEMB_{Elm,1} \\ nf \leftarrow MEMB_{Elm,2} \\ prop \leftarrow MEMB_{Elm,3} \\ xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\ yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\ xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\ yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\ Le \leftarrow \sqrt{(xf - xi)^2 + (yf - yi)^2} \\ \lambda xe \leftarrow \dfrac{xf - xi}{Le} \\ \lambda ye \leftarrow \dfrac{yf - yi}{Le} \\ Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\ Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\ (Le \;\; \lambda xe \;\; \lambda ye \;\; Ae \;\; Ee)^T \end{array} \right.$$

Con el programa se obtiene para el elemento

$Elm = 4$

- Longitud del elemento

  $Le = 40$

- Cosenos directores

  $\lambda xe = 1$

  $\lambda ye = 0$

- Propiedades

  $Ae = 1$

  $Ee = 2.95 \times 10^7$

4.2.2 La matriz de rigidez en coordenada local está dado por:

$$k := \frac{Ee \cdot Ae}{Le} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{29500000 \cdot 1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 7.375 \times 10^5 & -7.375 \times 10^5 \\ -7.375 \times 10^5 & 7.375 \times 10^5 \end{pmatrix}$$

4.2.3 La matriz de transformación de desplazamientos está dado por:

$$L := \begin{pmatrix} \lambda xe & \lambda ye & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda xe & \lambda ye \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.4 Matriz de rigidez del elemento respecto al sistema global es.

$$K := L^{T} \cdot k \cdot L$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{T} \cdot \left[\frac{29500000 \cdot 1}{40} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \times 10^{6}}{40}$$

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

4-1. Matriz de Rigidez Ensamblado

▶ MEF/ARMADURAS/DATOS

▶ MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▶ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

▼ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO

Programa que ensambla la matriz de rigidez de la estructura "K"

$$
\begin{aligned}
K := \quad & N \leftarrow 2\,\mathrm{rows}(NODE) \\
& f(x,y) \leftarrow 0 \\
& K \leftarrow \mathrm{matrix}(N,N,f) \\
& \text{for } i \in 1..\mathrm{rows}(MEMB) \\
& \quad ni \leftarrow MEMB_{i,1} \\
& \quad nf \leftarrow MEMB_{i,2} \\
& \quad prop \leftarrow MEMB_{i,3} \\
& \quad xi \leftarrow NODE_{ni,1} \\
& \quad yi \leftarrow NODE_{ni,2} \\
& \quad xf \leftarrow NODE_{nf,1} \\
& \quad yf \leftarrow NODE_{nf,2} \\
& \quad Le \leftarrow \sqrt{(xf-xi)^2+(yf-yi)^2} \\
& \quad \lambda xe \leftarrow \frac{xf-xi}{Le} \\
& \quad \lambda ye \leftarrow \frac{yf-yi}{Le} \\
& \quad Ae \leftarrow PROP_{prop,1} \\
& \quad Ee \leftarrow PROP_{prop,2} \\
& \quad k \leftarrow \frac{Ee\cdot Ae}{Le}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \\
& \quad L \leftarrow \begin{pmatrix}\lambda xe & \lambda ye & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda xe & \lambda ye\end{pmatrix} \\
& \quad Ke \leftarrow L^T\cdot k\cdot L \\
& \quad \text{"Columna 2*ni-1"} \\
& \quad K_{2\cdot ni-1,2\cdot ni-1} \leftarrow K_{2\cdot ni-1,2\cdot ni-1} + \frac{Ke_{1,1}}{2} \\
& \quad K_{2ni,2ni-1} \leftarrow K_{2ni,2ni-1} + Ke_{2,1} \\
& \quad K_{2\cdot nf-1,2\cdot ni-1} \leftarrow K_{2\cdot nf-1,2\cdot ni-1} + Ke_{3,1} \\
& \quad K_{2nf,2ni-1} \leftarrow K_{2nf,2ni-1} + Ke_{4,1} \\
& \quad \text{"Columna 2*ni"}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_{2ni,2\cdot ni} \leftarrow K_{2ni,2\cdot ni} + \frac{Ke_{2,2}}{2}\\
&K_{2nf-1,2ni} \leftarrow K_{2nf-1,2ni} + Ke_{3,2}\\
&K_{2nf,2ni} \leftarrow K_{2nf,2ni} + Ke_{4,2}\\
&\text{"Columna 2*nf-1"}\\
&K_{2nf-1,2nf-1} \leftarrow K_{2nf-1,2nf-1} + \frac{Ke_{3,3}}{2}\\
&K_{2nf,2nf-1} \leftarrow K_{2nf,2nf-1} + Ke_{4,3}\\
&\text{"Columna 2*nf"}\\
&K_{2nf,2nf} \leftarrow K_{2nf,2nf} + \frac{Ke_{4,4}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K \leftarrow K^{T} + K\\
&K
\end{aligned}
$$

$$
K = \begin{pmatrix}
22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0\\
5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0\\
-15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0\\
-7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0\\
-5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \cdot \frac{29.5\cdot 10^{6}}{600}
$$

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO

5. Estableciendo las Condiciones de Frontera

▶ MEF/ARMADURAS/DATOS

▶ MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▶ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

▶ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO

▼ MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA

Modificando la matriz de rigidez "K" según las restricciones en los apoyos.

$$
Km := \left|
\begin{array}{l}
Km \leftarrow K \\
\text{for } i \in 1 .. \text{rows}(SUPP) \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
n \leftarrow SUPP_{i,1} \\
ux \leftarrow SUPP_{i,2} \\
uy \leftarrow SUPP_{i,3} \\
Km_{2n-1,2n-1} \leftarrow \infty \ \text{ if } ux = 1 \\
Km_{2n,2n} \leftarrow \infty \ \text{ if } uy = 1
\end{array}
\right. \\
Km
\end{array}
\right.
$$

$$
Km = \begin{pmatrix}
2.034 \times 10^{302} & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\
5.76 & 2.034 \times 10^{302} & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\
-15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2.034 \times 10^{302} & 0 & -20 & 0 & 0 \\
-7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\
-5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 2.034 \times 10^{302} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.034 \times 10^{302}
\end{pmatrix} \cdot \frac{29.5 \cdot 10^{6}}{600}
$$

▲ MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA

5-1 Obteniendo Desplazamiento en Nudos

▶ MEF/ARMADURAS/DATOS

▶ MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

▶ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

▶ MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO

▶ MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA

▼ MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS

Formando la matriz aumentada.

$$\mathrm{augment}(Km, F) = \begin{pmatrix} 1\times10^{302} & 2.832 & -7.375 & 0 & -3.776 & -2.832 & 0 & 0 & -0.079 \\ 2.832 & 1\times10^{302} & 0 & 0 & -2.832 & -2.124 & 0 & 0 & -0.059 \\ -7.375 & 0 & 7.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\times10^{302} & 0 & -9.833 & 0 & 0 & -0.098 \\ -3.776 & -2.832 & 0 & 0 & 11.151 & 2.832 & -7.375 & 0 & 0.079 \\ -2.832 & -2.124 & 0 & -9.833 & 2.832 & 11.957 & 0 & 0 & 0.157 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7.375 & 0 & 1\times10^{302} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\times10^{302} & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{5}$$

el sistema de ecuaciones en su forma escalonada reducida

$$\mathrm{rref}(\mathrm{augment}(Km, F)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3.951\times10^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

los desplazamiento en los nudos son(según los grados de libertad):

$$Q := \mathrm{rref}(\mathrm{augment}(Km, F))^{\langle \mathrm{rows}(Km)+1 \rangle}$$

$$Q^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3.951\times10^{-3} & 0.012 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▲ MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS

6 Reacciones en los Apoyos

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO

MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA

MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS

MEF/ARMADURAS/REACCIONES EN APOYOS

Sustituyendo datos en la ecuación fundamental del elemento finito

$$R := K \cdot Q - F$$

$$R^T = \begin{pmatrix} 2.914 \times 10^3 & 2.185 \times 10^3 & 0 & -2.185 \times 10^3 & 1.819 \times 10^{-12} & 0 & -2.914 \times 10^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ordenando las reacciones:
Columna 1: número de nudo
Columna 2: Reacción en la dirección "x" global
Columna 3: Reacción en la dirección "y" global

```
Ro := | f(x,y) ← 0
      | Ro ← matrix(rows(SUPP), 3, f)
      | for  i ∈ 1 .. rows(SUPP)
      |    | n ← SUPP[i,1]
      |    | ux ← SUPP[i,2]
      |    | uy ← SUPP[i,3]
      |    | Ro[i,2] ← R[2n−1]  if  ux = 1
      |    | Ro[i,3] ← R[2n]  if  uy = 1
      |    | Ro[i,1] ← n
      | Ro
```

Reacciones en los nudos son:

$$Ro = \begin{pmatrix} 1 & 2.914 \times 10^3 & 2.185 \times 10^3 \\ 2 & 0 & -2.185 \times 10^3 \\ 4 & -2.914 \times 10^3 & 0 \end{pmatrix}$$

MEF/ARMADURAS/REACCIONES EN APOYOS

7 Esfuerzo Axial en los Elementos

MEF/ARMADURAS/DATOS

MEF/ARMADURAS/VECTOR DE CARGAS

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ C/E

MEF/ARMADURAS/MATRIZ RIGIDEZ ENSAMBLADO

MEF/ARMADURAS/ESTABLECE CONDICIONES DE FRONTERA

MEF/ARMADURAS/DESPLAZAMIENTO EN NUDOS

MEF/ARMADURAS/REACCIONES EN APOYOS

MEF/ARMADURAS/ESFUERZO AXIAL

Programa que obtiene los desplazamientos en todas las barras

```
σ := | f(x,y) ← 0
     | ct ← matrix(rows(MEMB),2,f)
     | for i ∈ 1..rows(ETF)
     |   | elem ← ETF[i,1]
     |   | "coeficiente de expación térmico"
     |   | ct[elem,1] ← ETF[i,2]
     |   | "variación de temperatura"
     |   | ct[elem,2] ← ETF[i,3]
     | for i ∈ 1..rows(MEMB)
     |   | ni ← MEMB[i,1]
     |   | nf ← MEMB[i,2]
     |   | prop ← MEMB[i,3]
     |   | xi ← NODE[ni,1]
     |   | yi ← NODE[ni,2]
     |   | xf ← NODE[nf,1]
     |   | yf ← NODE[nf,2]
     |   | Le ← √((xf − xi)^2 + (yf − yi)^2)
     |   | λxe ← (xf − xi)/Le
     |   | λye ← (yf − yi)/Le
     |   | Ee ← PROP[prop,2]
     |   |   ( Q[2ni−1]
```

$$
\left|
\begin{array}{l}
q \leftarrow \begin{pmatrix} Q_{2ni} \\ Q_{2nf-1} \\ Q_{2nf} \end{pmatrix} \\
\alpha \leftarrow ct_{i,1} \\
\Delta T \leftarrow ct_{i,2} \\
\sigma_i \leftarrow \dfrac{Ee}{Le} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda xe & -\lambda ye & \lambda xe & \lambda ye \end{pmatrix} \cdot q - Ee \cdot \alpha \cdot \Delta T
\end{array}
\right.
\\
\sigma
$$

$$
\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.185 \times 10^{3} \\ -3.642 \times 10^{3} \\ 2.914 \times 10^{3} \end{pmatrix}
$$

MEF/ARMADURAS/ESFUERZO AXIAL

8- Comparando los resultados con el programa Sap2000 11.0.4.

8.1 Desplazamientos en los nudos.

Resultado con sap2000 11.0.4

Joint Text	OutputCase Text	CaseType Text	U1 in	U2 in	U3 in	R1 Radians	R2 Radians	R3 Radians
1	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
2	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0
3	DEAD	LinStatic	0.003951	0	0.012222	0	0	0
4	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0	0

Resultado con mathCAD.

$$Q^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003951 & 0.012222 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2 reacciones en los apoyos.

Resultado con sap2000 11.0.4

Joint Text	OutputCase Text	CaseType Text	F1 Lb	F2 Lb	F3 Lb	M1 Lb-in	M2 Lb-in	M3 Lb-in
1	DEAD	LinStatic	2913.58	0	2185.19	0	0	0
2	DEAD	LinStatic	0	0	-2185.19	0	0	0
4	DEAD	LinStatic	-2913.58	0	0	0	0	0

Resultado con mathCAD

$$Ro = \begin{pmatrix} 1 & 2913.58 & 2185.19 \\ 2 & 0 & -2185.19 \\ 4 & -2913.58 & 0 \end{pmatrix}$$

8.3 Esfuerzo axial en los elementos.

Resultado con sap2000 11.0.4

Frame Text	Station in	OutputCase Text	CaseType Text	P Lb	V2 Lb	V3 Lb	T Lb-in	M2 Lb-in
1	0	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0
1	20	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0
1	40	DEAD	LinStatic	0	0	0	0	0
2	0	DEAD	LinStatic	2185.19	0	0	0	0
2	15	DEAD	LinStatic	2185.19	0	0	0	0
2	30	DEAD	LinStatic	2185.19	0	0	0	0
3	0	DEAD	LinStatic	-3641.98	0	0	0	0
3	25	DEAD	LinStatic	-3641.98	0	0	0	0
3	50	DEAD	LinStatic	-3641.98	0	0	0	0
4	0	DEAD	LinStatic	2913.58	0	0	0	0
4	20	DEAD	LinStatic	2913.58	0	0	0	0
4	40	DEAD	LinStatic	2913.58	0	0	0	0

Resultado con mathCAD.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2185.19 \\ -3641.98 \\ 2913.58 \end{pmatrix}$$

Conclusión:

Se Observa que los cálculos obtenidos son idénticos a los de sap2000 11.0.4