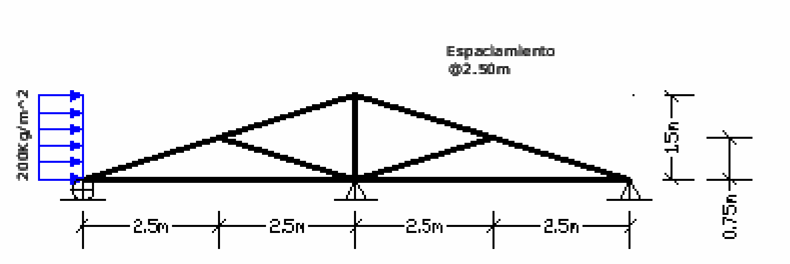
Ejercicio #03:

Determinar las cargas axiales de la cercha que se indica.

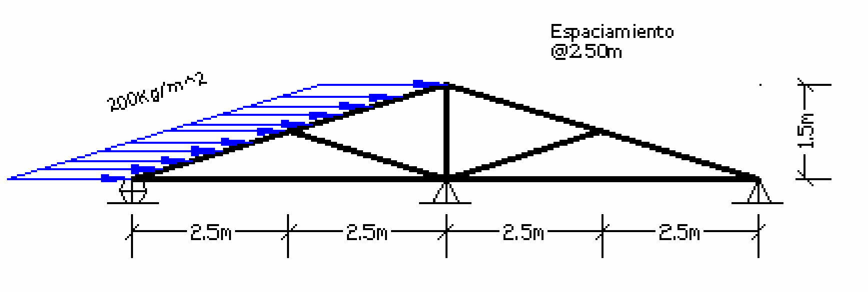


Desarrollo:

1- para este ejemplo se usará maderas del grupo C[1]
2- la dimensión de la sección transversal de los elementos, elijo las mínimas[2].
3- Para el análisis no se consideran las sobrecargas de servicio, peso propio de coberturas ni peso propio de los elementos, sólo se obtendrá las fuerzas axiales debido a la carga que se muestra en la figura.

1- Hallando cargas equivalentes:

Las cargas actúan sólo en una dirección:



Como el espaciamiento es 2.5m el área de influencia $2.5m/2 = 1.25m$ a cada lado de la armadura, entonces:

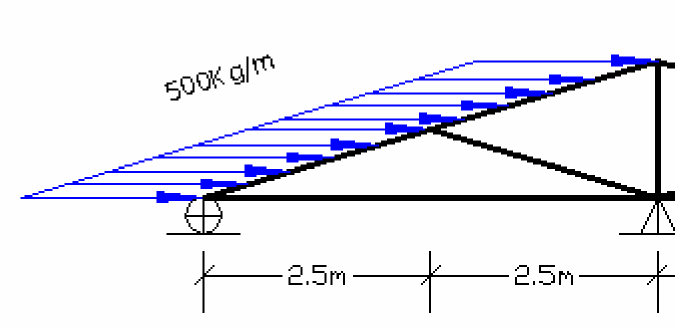
$$(1.25m + 1.25m) * 5.22m * 200Kg / m^2 = 2610Kg$$

Ahora, distribuyendo la carga sobre los elementos:

$$\frac{2610kg}{5.22m} = 500kg/m$$

Quedaría así:

[1] Como el espaciamiento es 2.5m se usa Emín=55000 kg/cm^2
[2] Según la norma del Grupo Andino, las dimensiones mínimas: base=4cm, Altura=6.5cm

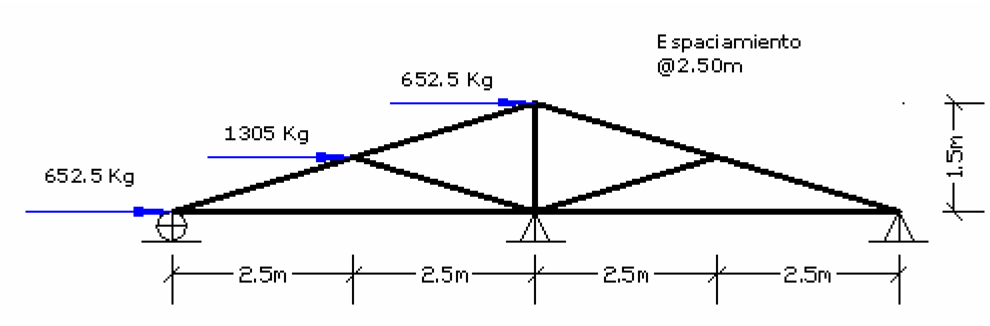


Reduciéndolo a los nudos, se tiene:

$$2.61m * 500\,{}^{Kg}\!/_{m} = 1305Kg$$

$$\frac{2.61m}{2} * 500\,{}^{Kg}\!/_{m} = 652.5Kg$$

La carga equivalente es:

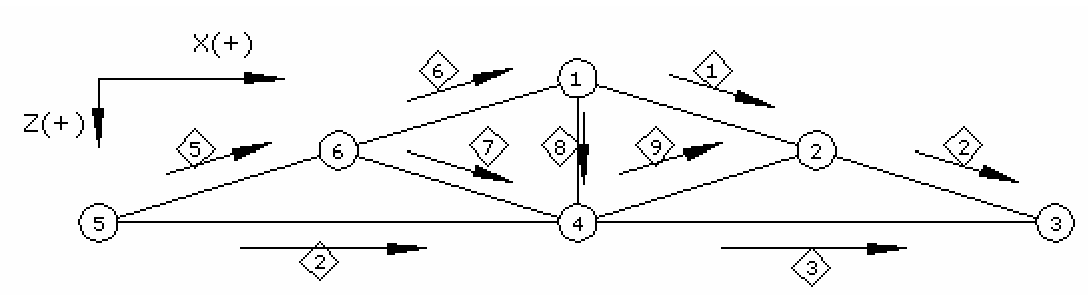


2- Hallando las fuerzas axiales en los elementos de la armadura:

Para obtener las fuerzas axiales se realizará por el método de la rigidez.

Paso #1: la aplicación del método de la rigidez requiere subdividir la estructura en una serie de elementos finitos e identificar sus puntos extremos como nodos.

Lo primero es establecer un eje de coordenadas, enumerar nudos y barras de nuestra estructura, que para este cálculo debe ser como muestra la figura contigua.

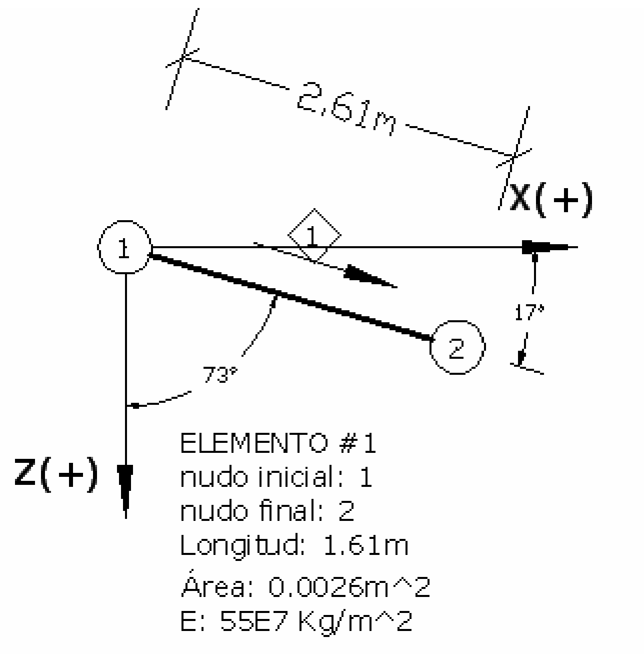


Paso #2: Vector de cargas.

Nudo	Fuerza(kg)	Dirección
1	652.5	1x
	0.	1z
2	0.	2x
	0.	2z
3	0.	3x
	0.	3z
4	0.	4x
	0.	4z
5	652.5	5x
	0.	5z
6	1305.	6x
	0.	6z

Paso #3: Hallando la matriz de rigidez de cada uno de los elementos con respecto al sistema global.

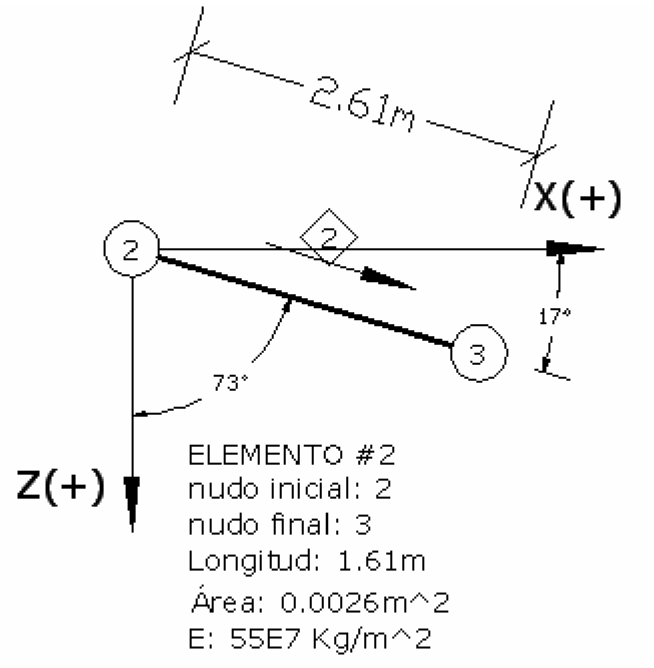
3.1- Elemento #1.



Y la matriz para este elemento es:

1x	1z	2x	2z	
5026391.15	1507917.34	-5026391.15	-1507917.34	**1x**
1507917.34	452375.20	-1507917.34	-452375.20	**1z**
-5026391.15	-1507917.34	5026391.15	1507917.34	**2x**
-1507917.34	-452375.20	1507917.34	452375.20	**2z**

3.2- Elemento #2.



Su correspondiente matriz de rigidez, es:

2x	2z	3x	3z	
5026391.15	1507917.34	-5026391.15	-1507917.34	**2x**
1507917.34	452375.20	-1507917.34	-452375.20	**2z**
-5026391.15	-1507917.34	5026391.15	1507917.34	**3x**
-1507917.34	-452375.20	1507917.34	452375.20	**3z**

Notamos que es igual al anterior por tener las mismas propiedades y la misma orientación.

De igual manera se obtienen las matrices de rigidez con respecto al sistema global de cada elemento, ensamblando convenientemente, resulta la matriz de rigidez de la estructura completa. $[K_T] = k1 + k2 + ... + k9$

1x	1z	2x	2z	3x	3z	4x	4z	5x	5z	6x	6z	
10052782.30	0.00	-5026391.15	-1507917.34	0.00	1	0.00	0.00	0.00	0.00	-5026391.15	1507917.34	1x
0.00	10438083.74	-1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	-9533333.33	0.00	0.00	1507917.34	-452375.20	1z
-5026391.15	-1507917.34	15079173.44	1507917.34	-5026391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	2x
-1507917.34	-452375.20	1507917.34	1357125.61	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	2z
0.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	7886391.15	1507917.34	-2860000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3x
0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3z
0.00	0.00	-5026391.15	1507917.34	-2860000.00	0.00	15772782.30	0.00	-2860000.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	4x
0.00	-9533333.33	1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	10438083.74	0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	4z
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2860000.00	0.00	7886391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	5x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1507917.34	452375.20	1507917.34	-452375.20	5z
-5026391.15	1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	15079173.44	-1507917.34	6x
1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	-452375.20	-1507917.34	1357125.61	6z

Y la matriz ordenada de acuerdo a las restricciones:

1x	1z	2x	2z	3x	3z	4x	4z	5x	5z	6x	6z	
10052782.30	0.00	-5026391.15	-1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5026391.15	1507917.34	1x
0.00	10438083.74	-1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	-9533333.33	0.00	0.00	1507917.34	-452375.20	1z
-5026391.15	-1507917.34	15079173.44	1507917.34	-5026391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	2x
-1507917.34	-452375.20	1507917.34	1357125.61	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	2z
0.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	1.00E500	1507917.34	-2860000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3x
0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	1.00E500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3z
0.00	0.00	-5026391.15	1507917.34	-2860000.00	0.00	1.00E500	0.00	-2860000.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	4x
0.00	-9533333.33	1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	1.00E500	0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	4z
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2860000.00	0.00	7886391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	5x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1507917.34	1.00E500	1507917.34	-452375.20	5z
-5026391.15	1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	15079173.44	-1507917.34	6x
1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	-452375.20	-1507917.34	1357125.61	6z

Paso #4:

Con estos datos[3] ya es posible obtener los desplazamientos de los nudos de la estructura[4], formando la matriz aumentada se tiene.

$$[D]=\left[Km|F\right]$$

Donde:

- [D]: vector de desplazamientos en el sistema global de la estructura.
- Km: matriz re rigidez procesado según las restricciones en los apoyos.
- F: vector de fuerzas equivalentes en los nudos.

1x	1z	2x	2z	3x	3z	4x	4z	5x	5z	6x	6z	Fuerzas	
10052782.30	0.00	-5026391.15	-1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-5026391.15	1507917.34	652.5	1x
0.00	10438083.74	-1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	-9533333.33	0.00	0.00	1507917.34	-452375.20	0.	1z
-5026391.15	-1507917.34	15079173.44	1507917.34	-5026391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	0.	2x
-1507917.34	-452375.20	1507917.34	1357125.61	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.	2z
0.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	1.00E500	1507917.34	-2860000.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.	3x
0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	1.00E500	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.	3z
0.00	0.00	-5026391.15	1507917.34	-2860000.00	0.00	1.00E500	0.00	-2860000.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	0.	4x
0.00	-9533333.33	1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	1.00E500	0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	0.	4z
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-2860000.00	0.00	7886391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	652.5	5x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1507917.34	1.00E500	1507917.34	-452375.20	0.	5z
-5026391.15	1507917.34	0.00	0.00	0.00	0.00	-5026391.15	-1507917.34	-5026391.15	1507917.34	15079173.44	-1507917.34	1305.	6x
1507917.34	-452375.20	0.00	0.00	0.00	0.00	-1507917.34	-452375.20	1507917.34	-452375.20	-1507917.34	1357125.61	0.	6z

Donde la última columna son las fuerzas[5]

[3] En la matriz ordenada de acuerdo a las restricciones los elementos resaltados en rojo son las restricciones.
[4] Éste es un sistema lineal de ecuaciones donde hay más ecuaciones que incógnitas, los valores conocidos son las restricciones en los nudos en las direcciones restringidas de desplazamiento.

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta:

1x	1z	2x	2z	3x	3z	4x	4z	5x	5z	6x	6z	Desp	
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.76E-4	1x
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-3.72E-5	1z
0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	9.13E-5	2x
0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.04E-4	2z
0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	9.18E-498	3x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2.75E-498	3z
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.69E-497	4x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.59E-498	4z
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	3.63E-4	5x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	-1.16E-498	5z
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	2.85E-4	6x
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	-5.18E-4	6z

La última columna representa los desplazamientos, en los nudos de la armadura en la dirección global.

[5] Los elementos resaltados con anaranjado.

Ordenando los desplazamientos, se tiene:

Nudo	desplazamiento en X(en m)	Desplazamiento en Z(en m)
1.00	3.76E-4	-3.70E-5
2.00	9.10E-5	3.04E-4
3.00	0.00	0.00
4.00	0.00	0.00
5.00	3.63E-4	0.00
6.00	2.85E-4	-5.18E-4

Paso #5: hallando las fuerzas axiales en los elementos.

De la igualdad.

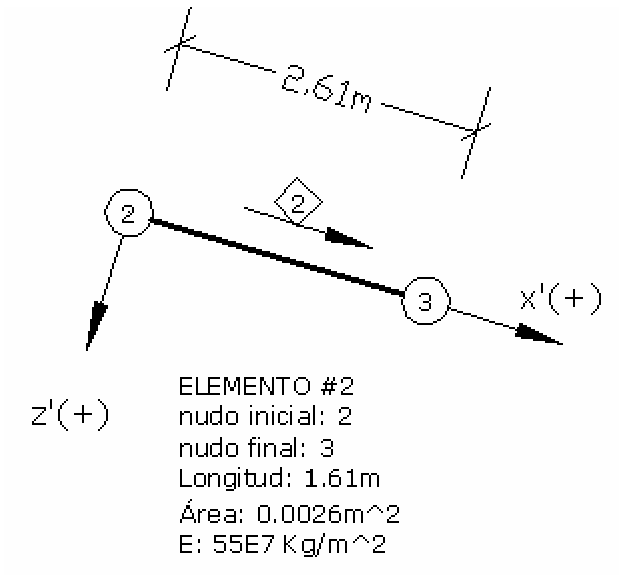
$$[q]=\left[k'\right].[T].[D]$$

Donde:

- [q]: fuerzas en los extremos de los elementos.
- [k']: matriz de rigidez de miembro.
- [T]: matriz e transformación de desplazamiento.
- [D]: vector de desplazamientos en los extremos de la barra.

5.1- para el elemento #2.

5.1.1- matriz de rigidez de miembro.



$$k_2^{'} = \begin{bmatrix} 5478566.35 & -5478566.35 \\ -5478566.35 & 5478566.35 \end{bmatrix}$$

5.1.2- Matriz de transformación de desplazamientos.

$$T = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96 & 0.29 \end{bmatrix}$$

5.1.3- Vector de desplazamiento en los extremos del elemento #2.

$$D = \begin{bmatrix} 9.13E-5 \\ 3.04E-4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Direccion2x \\ Direccion2z \\ Direccion3x \\ Direccion3x \end{array}$$

Multiplicando estos matrices resulta:

$$[q] = \begin{bmatrix} 5478566.35 & -5478566.35 \\ -5478566.35 & 5478566.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.96 & 0.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96 & 0.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.13E-5 \\ 3.04E-4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[q] = \begin{bmatrix} 958.43 \\ -958.43 \end{bmatrix} \begin{array}{l} Kg \\ Kg \end{array}$$

De esta manera se obtiene las fuerzas axiales para cada elemento, ordenando los resultados se tiene:

Elemento	Nudo	Fuerza Axial (en Kg)
1.	**1.**	958.434.376
	2.	-958.434.376
2.	**2.**	958.434.376
	3.	-958.434.376
3.	**4.**	0.
	3.	0.
4.	**5.**	1309.4863
	4.	-1309.4863
5.	**5.**	-404.025.624
	6.	404.025.624
6.	**6.**	277.204.376
	1.	-277.204.376
7.	**6.**	681.23
	4.	-681.23
8.	**1.**	-355.058.183

	4.	355.058.183
9.	**4.**	0.
	2.	0.